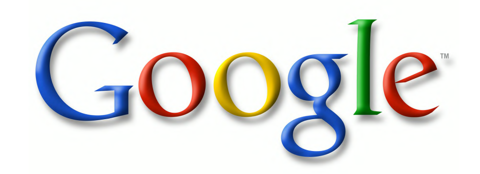
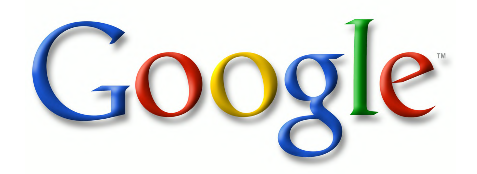




OSTWALD'S KLASSIKER
DER EXAKTEN WISSENSCHAFTEN.
Nr. 169.

VERSUCH ZUR LÖSUNG EINES PROBLEMS DER WAHRSCHEINLICHKEITSRECHNUNG

VON

THOMAS BAYES

WILHELM ENGELMANN IN LEIPZIG.

-1.50 16. XII. 08

OSTWALDS KLASSIKER

DER

EXAKTEN WISSENSCHAFTEN

8. Gebunden.

Erschie[n…]

Nr. 1. H. H[…] […]S.) ℳ —.80.
» 2. C. F. […] im verkehrten
Verh[…] […]gs- u. Abstoß.-
Kräft[…] […]S.) ℳ —.80.
» 5. —— […] v. Wangerin.
Dritt[…]
» 10. F. Ne[…] […]n elektrischen
Strön[…] ℳ 1.50.
» 11. Galil[…] [ü]ber zwei neue
Wiss[…] […]6 Fig. i. Text.
Aus […] weiter, unver-
änder[…]
» 14. C. F. […] [F]unktionen usw.
(1799[…] […]81 S.) ℳ 1.50.
» 17. A. Br[…] […]1849.) Übers.
u. in […] […]. E. Blasius.
Mit 1[…]
» 19. Über […] […]n von Laplace
(178[…] und Dirichlet
(183[…] 2.—.
» 24. Galil[…] neue Wissens-
zweig[…] Aus d. Ital. u.
Lat. ü[…] […]41 S.) ℳ 2.—.
» 25. —— […] […]xt. Aus d. Ital.
u. La[…] unveränderter
Abdr[…]
» 36. F. Ne[…] […]7.) Herausgeg.
von C[…] […].50.
» 46. Abha[…] […]andlungen von
Joh. […] [Le]onhard Euler
(1744[…] […]4 S.) ℳ 2.—.
» 47. —— […] (1762, 1770),
Lege[…] […] P. Stäckel.
Mit 1[…]
» 53. C. F. […] absolutes Maß
zurüc[…] 1.—.
» 54. J. H. […] der Land- und
Himn[…] Mit 21 Text-

Nr. 55. **Lagrange** und **Gauss**, Kartenprojection. (1779 u. 1822.) Herausg. von A. Wangerin. Mit 2 Textfiguren. (102 S.) ℳ 1.60.

» 60. **Jacob Steiner**, Die geometrischen Constructionen, ausgeführt mittels der geraden Linie und eines festen Kreises, als Lehrgegenstand auf höheren Unterrichts-Anstalten u. zur praktischen Benutzung. (1833.) Herausgegeben von A. v. Oettingen. Mit 25 Textfiguren. (85 S.) ℳ 1.20.

» 61. **G. Green**, Versuch, die math. Analysis auf die Theorien d. Elektric. u. des Magnetismus anzuwenden. (1828.) Herausgegeben von A. v. Oettingen und A. Wangerin. (140 S.) ℳ 1.80.

» 64. **C. G. J. Jacobi**, Über die vierfach periodischen Functionen zweier Variabeln, auf die sich die Theorie der Abelschen Transcendenten stützt. (1834.) Herausgeg. von H. Weber. Aus dem Lateinischen übersetzt von A. Witting. (40 S.) ℳ —.70.

» 65. **Georg Rosenhain**, Abhandl. über die Functionen zweier Variabler mit 4 Perioden, welche die Inversen sind der ultraelliptischen Integrale erster Klasse. (1851.) Herausgeg. von H. Weber. Aus dem Französischen übersetzt von A. Witting. (94 S.) ℳ 1.50.

» 67. **A. Göpel**, Entwurf einer Theorie der Abelschen Transcendenten erster Ordnung. (1847.) Herausgegeben von H. Weber. Aus dem Lateinischen übersetzt von A. Witting. (60 S.) ℳ 1.—.

» 69. **James Clerk Maxwell**, Über Faradays Kraftlinien. (1855 u. 1856.) Herausgegeben von L. Boltzmann. (130 S.) ℳ 2.—.

» 71. **N. H. Abel**, Untersuchungen über die Reihe:

$$1+\frac{m}{1}x+\frac{m\cdot(m-1)}{1\cdot2}\cdot x^2+\frac{m\cdot(m-1)\cdot(m-2)}{1\cdot2\cdot3}\cdot x^3+\cdots\cdots$$

(1826.) Herausgegeben von A. Wangerin. (46 S.) ℳ 1.—.

» 73. **Leonhard Euler**, Zwei Abhandlg. über sphärische Trigonometrie. Grundzüge der sphärischen Trigonometrie und allgemeine sphärische Trigonometrie. (1753 u. 1779.) Aus dem Französischen und Latein. übersetzt u. herausgegeben von E. Hammer. Mit 6 Fig. im Text. (65 S.) ℳ 1.—.

» 75. **Axel Gadolin**, Abhandlg. über die Herleitung aller krystallograph. Systeme mit ihren Unterabtheil. aus einem einzigen Prinzipe. (Gelesen den 19. März 1867.) Deutsch herausgeg. von P. Groth. Mit 26 Textfiguren und 3 Tafeln. (92 S.) ℳ 1.50.

» 76. **F. E. Neumann**, Theorie der doppelt. Strahlenbrech., abgeleitet aus den Gleichungen der Mechanik. (1832.) Herausg. v. A. Wangerin. (52 S.) ℳ —.80.

» 77. **C. G. J. Jacobi**, Über die Bildung und die Eigenschaften der Determinanten. (De formatione et proprietatibus determinantium.) (1841.) Herausgeg. von P. Stäckel. (73 S.) ℳ 1.20.

» 78. —— Über die Functionaldeterminanten. (De determinantibus functionalibus.) (1841.) Herausgeg. von P. Stäckel. (72 S.) ℳ 1.20.

» 79. **H. v. Helmholtz**, 2 hydrodynamische Abhandlungen. I. Über Wirbelbewegungen. (1858.) — II. Über discontinuierliche Flüssigkeitsbewegungen. (1868.) Herausgeg. von A. Wangerin. (80 S.) ℳ 1.20.

» 80. —— Theorie der Luftschwingungen in Röhren mit offenen Enden. (1859.) Herausgeg. von A. Wangerin. (132 S.) ℳ 2.—.

» 82. **Jacob Steiner**, Systemat. Entwickl. der Abhängigkeit geometr. Gestalten voneinander, mit Berücksichtig. der Arbeiten alter und neuer Geometer über Porismen, Projections-Methoden, Geometrie d. Lage, Transversalen, Dualität und Reciprocität usw. (1832.) I. Theil. Herausgeg. von A. v. Oettingen. Mit 2 Tafeln und 14 Textfiguren. (126 S.) ℳ 2.—.

Versuch zur Lösung eines Problems der Wahrscheinlichkeitsrechnung

Von

Thomas Bayes

Herausgegeben

von

H. E. Timerding

Mit 3 Textfiguren

Leipzig
Verlag von Wilhelm Engelmann
1908



Vorbemerkung.

Die folgende Abhandlung, welche das sogenannte Bayessche Theorem enthält, bildet einen entscheidenden Wendepunkt in der Entwicklung der Wahrscheinlichkeitsrechnung. Sie verwandelte diese Disziplin aus einem bloßen Spiel des Geistes in eine ernste Wissenschaft, indem sie den Grund für die empirische Bestimmung der mathematischen Wahrscheinlichkeit legte und damit die Anwendbarkeit dieses Begriffes auf andere Gegenstände als Glücksspiele, bei denen die Wahrscheinlichkeit oder Chance durch die Bedingungen des Spieles apriori festgelegt ist, ermöglichte.

Die Abhandlung ist erst nach des Verfassers Tode durch *Richard Price* herausgegeben worden in zwei Abschnitten, die durch Zusätze des Herausgebers stark vermehrt sind. Diese Zusätze sind zum Glücke von dem aus *Bayes'* hinterlassenen Papieren Mitgeteilten deutlich geschieden und in der vorliegenden Übersetzung fortgelassen worden, denn sie enthalten im Verhältnis zu dem breiten Raum, den sie einnehmen, nicht hinreichend wichtiges Material, um ihre erneute Herausgabe zu rechtfertigen.

Dagegen liegt von *Bayes'* eigener Arbeit nur ein Teil fertig ausgeführt vor. Der Teil, den *Price* nachträglich veröffentlichte, ist zwar der Hauptsache nach vollendet, aber doch wohl nur einem Konzepte entnommen. Ein dritter Teil ist völlig unfertig überliefert, und *Price* hat (ob ihm nun die Fähigkeit oder die Lust fehlte) die notwendigen Ergänzungen nicht nachgetragen. Sie ließen sich aber mit leichter Mühe geben und sind hier der Bequemlichkeit wegen direkt in den Text eingefügt, indem sie sich so gut wie möglich der Darstellung in den übrigen Partien anzupassen suchen. Ebenso sind im zweiten Teile zur Vervollständigung der Ableitung ein paar kürzere Zusätze eingeschoben worden. Diese Zusätze sind dadurch kenntlich gemacht, daß sie in eckige Klammern [ ] eingeschlossen sind.



Erstes Stück.

(Philosophical Transactions, Vol. 53, 1763, pp. 376—398.)

Problem.

Gegeben die Anzahl Male, die ein unbekanntes Ereignis eingetreten und ausgeblieben ist. Gesucht die Chance, daß die Wahrscheinlichkeit seines Eintretens bei einem einzelnen Versuch irgendwo zwischen zwei angebbaren Graden der Wahrscheinlichkeit liegt.

Erster Abschnitt.

Definitionen.

1. Mehrere Ereignisse sind unvereinbar, wenn das Eintreten eines von ihnen das Eintreten der übrigen ausschließt.
2. Zwei Ereignisse sind entgegengesetzt, wenn eines von ihnen eintreten muß, aber beide zusammen nicht eintreten können.
3. Man sagt, ein Ereignis bleibt aus, wenn es nicht eintritt, oder wenn, was dasselbe heißt, das entgegengesetzte Ereignis eintritt.
4. Man sagt, ein Ereignis ist entschieden, wenn es entweder eingetreten oder ausgeblieben ist.
5. Die Wahrscheinlichkeit eines Ereignisses ist das Verhältnis zwischen dem Werte, welcher einer an das Eintreten des Ereignisses geknüpften Erwartung zu geben ist, und dem Werte des in diesem Falle erwarteten Gewinnes.
6. Unter Chance verstehe ich dasselbe wie unter Wahrscheinlichkeit.
7. Ereignisse sind unabhängig, wenn das Eintreten des einen die Wahrscheinlichkeit der übrigen weder vermindert, noch vermehrt.

Lehrsatz 1.

Wenn mehrere Ereignisse unvereinbar sind, so *ist die Wahrscheinlichkeit*, *daß das eine oder andere von ihnen eintritt*, *gleich der Summe der Wahrscheinlichkeiten eines jeden von ihnen.*

Vorausgesetzt, daß drei solche Ereignisse existieren, und ich, wenn eines von ihnen eintritt, die Summe N erhalte, endlich daß die Wahrscheinlichkeiten des ersten, zweiten, dritten der Reihe nach $\frac{a}{N}, \frac{b}{N}, \frac{c}{N}$ sind, dann ist (nach der Definition der Wahrscheinlichkeit) der Wert meiner Erwartung vom ersten Ereignis a, vom zweiten b und vom dritten c. Deswegen ist der Wert meiner Erwartungen von allen dreien $a + b + c$. Aber die Summe meiner Erwartungen von allen dreien ist in diesem Falle die Erwartung, die Summe N zu erhalten, wenn eines der drei Ereignisse eintritt. Daher ist (nach Definition 5) die Wahrscheinlichkeit des einen oder andern von diesen Ereignissen

$$\frac{a+b+c}{N} \text{ oder } \frac{a}{N} + \frac{b}{N} + \frac{c}{N},$$

also die Summe der Wahrscheinlichkeiten eines jeden von ihnen.

Zusatz. Wenn es gewiß ist, daß das eine oder andere der drei Ereignisse eintreten muß, dann wird $a + b + c = N$. Denn in diesem Falle kommen alle einzelnen Erwartungen zusammen der bestimmten Erwartung der Summe N gleich, und ihre Werte müssen zusammen N ergeben. Hieraus ist einleuchtend, daß die Wahrscheinlichkeit eines Ereignisses zu der Wahrscheinlichkeit seines Ausbleibens (oder des entgegengesetzten Ereignisses) addiert das Verhältnis der Gleichheit ergibt. Denn dies sind zwei unvereinbare Ereignisse, von denen eines eintreten muß. Wenn deswegen die Wahrscheinlichkeit eines Ereignisses $\frac{P}{N}$ ist, so ist die seines Ausbleibens $\frac{N-P}{N}$.

Lehrsatz 2.

Wenn an das Eintreten eines Ereignisses eine Erwartung geknüpft wird, so verhält sich die Wahrscheinlichkeit des Ereignisses zu der Wahrscheinlichkeit seines Ausbleibens wie der Verlust bei seinem Ausbleiben zu dem Gewinn bei seinem Eintreten.

Vorausgesetzt, daß eine Person die Summe N erwartet, wenn ein Ereignis von der Wahrscheinlichkeit $\frac{P}{N}$ eintritt, dann ist (nach Definition 5) der Wert ihrer Erwartung P, und wenn daher das Ereignis ausbleibt, so verliert sie mit ihrer Erwartung den Wert P. Wenn es eintritt, erhält sie die Summe N, aber ihre Erwartung hört auf. Ihr Gewinn ist deshalb $N - P$. Da nun die Wahrscheinlichkeit des Ereignisses $\frac{P}{N}$ ist, ist die seines Ausbleibens (nach dem Zusatze zu Lehrsatz 1) $\frac{N-P}{N}$. Aber $\frac{P}{N}$ verhält sich zu $\frac{N-P}{N}$ wie P zu $N - P$, d. h. die Wahrscheinlichkeit des Ereignisses verhält sich zu der Wahrscheinlichkeit seines Ausbleibens wie der Verlust bei seinem Ausbleiben zu dem Gewinn bei seinem Eintreten.

Lehrsatz 3.

Die Wahrscheinlichkeit, daß zwei zusammenhängende Ereignisse beide eintreten, ist das Verhältnis, das aus der Wahrscheinlichkeit des ersten Ereignisses und der Wahrscheinlichkeit des zweiten unter der Voraussetzung, daß der erste eintritt, zusammengesetzt ist.

Vorausgesetzt, daß ich, wenn beide Ereignisse eintreten, die Summe N erhalte, daß die Wahrscheinlichkeit hierfür $\frac{P}{N}$ ist, ferner daß die Wahrscheinlichkeit des ersten Verhältnisses $\frac{a}{N}$ ist $\left(\text{und folglich die seines Ausbleibens } \frac{N-a}{N}\right)$, und daß die Wahrscheinlichkeit des zweiten Ereignisses unter der Voraussetzung, daß das erste eintritt, $\frac{b}{N}$ ist, dann ist (nach Definition 5) P der Wert meiner Erwartung, und diese wird gleich b, wenn das erste Ereignis eintritt. In diesem Falle ist folglich mein Gewinn durch das erste Ereignis $b - P$ und im entgegengesetzten Falle mein Verlust P. Deswegen verhält sich nach dem vorigen Lehrsatze $\frac{a}{N}$ zu $\frac{N-a}{N}$, d. h. a zu $N - a$ wie P zu $b - P$, und danach weiter a zu N wie P zu b. Aber das Verhältnis von P zu N ist aus dem Verhältnis von P zu b und dem von b zu N zusammengesetzt,

also nach dem soeben Gefundenen auch aus dem Verhältnis von a zu N und dem von b zu N, d. h. die Wahrscheinlichkeit, daß die beiden zusammenhängenden Ereignisse beide eintreten, setzt sich aus der Wahrscheinlichkeit des ersten und der des zweiten Ereignisses unter der Voraussetzung, daß das erste eintritt, zusammen.

Zusatz. Wenn daher von zwei aufeinander folgenden Ereignissen die Wahrscheinlichkeit des ersten $\frac{a}{N}$ und die Wahrscheinlichkeit beider zusammen $\frac{P}{N}$ ist, dann ist die Wahrscheinlichkeit des zweiten unter der Voraussetzung, daß das erste eintritt, $\frac{P}{a}$.

Lehrsatz 4.

Wenn zwei zusammenhängende Ereignisse jeden Tag entschieden werden, und jeden Tag die Wahrscheinlichkeit des zweiten $\frac{b}{N}$ und die Wahrscheinlichkeit beider $\frac{P}{N}$ ist, und ich die Summe N erhalte, sowie an dem ersten Tage, an welchem das zweite Ereignis eintritt, auch beide Ereignisse zusammen eintreten, dann, sage ich, ist gemäß diesen Bedingungen die Wahrscheinlichkeit, daß ich N erhalte, $\frac{P}{b}$.

Denn gesetzt zunächst, sie sei $\frac{x}{N}$, und es verhalte sich

$$y \text{ zu } x \text{ wie } N - b \text{ zu } N,$$

dann ist, da $\frac{x}{N}$ die Wahrscheinlichkeit, daß ich N erhalte, x der Wert meiner Erwartung.

Anderseits ist der Wert dieser Erwartung, da sie von dem Zusammentreffen der beiden Ereignisse abhängt, wofür die Wahrscheinlichkeit $\frac{P}{N}$ ist, für den ersten Tag $= P$. Bleibt an diesem Tage der gewünschte Erfolg aus, so bleibt mir die Erwartung für die folgenden Tage, die ebensogroß ist wie meine anfängliche Erwartung, also den Wert x hat. Da nun die Wahrscheinlichkeit für das Ausbleiben des zweiten Ereignisses am ersten Tage (nach dem Zusatz zu Lehrsatz 1) $\frac{N-b}{N}$

oder $\frac{y}{x}$ ist und hiermit eine verbleibende Erwartung von dem Werte x verknüpft ist, so ist der Wert dieser Erwartung von vornherein $= y$. Aber diese letztere Erwartung erschöpft zusammen mit der Erwartung, die sich an das Eintreten beider Ereignisse am ersten Tage knüpft, offenbar meine ganze ursprüngliche Erwartung, deren Wert x ist. Es ist demnach

$$P + y = x.$$

Es ist aber weiter

$$\frac{y}{x} = \frac{N - b}{N}.$$

Deswegen wird

$$\frac{P}{x} = \frac{b}{N}$$

und

$$\frac{x}{N} \text{ (die Wahrscheinlichkeit, daß ich } N \text{ erhalte)} = \frac{P}{b}.$$

Zusatz. Würde ich, bevor es überhaupt bekannt ist, ob das erste Ereignis eingetreten ist oder nicht, finden, daß das zweite eingetreten ist, so könnte ich hieraus nur schließen, daß das Ereignis, von welchem meine Erwartung abhängt, entschieden ist, und hätte keinen Grund, den Wert meiner Erwartung höher oder niedriger anzuschlagen, als er vorher war. Denn würde ich ihn geringer annehmen, so würde es von mir vernünftig sein, wenn ich etwas hingäbe, um mir den früheren Stand meiner Erwartung zurückzuerkaufen, und das immer wieder, so oft ich erfahre, daß das zweite Ereignis eingetreten ist, was doch offenbar unsinnig wäre. Der gleiche Widersinn ergibt sich, wenn man sagt, ich müßte meine Erwartung höher werten als zuvor. Denn dann wäre es von mir vernünftig, wenn ich für einen kleinen Betrag diese Erwartung nicht gegen meine frühere Erwartung austauschen wollte, und das in gleicher Weise immer wieder, so oft (ohne daß über das erste Ereignis irgend etwas bekannt ist) ich erfahre, daß das zweite Ereignis eingetreten ist. Deswegen ist trotz der Entdeckung, daß das zweite Ereignis eingetreten ist, meine Erwartung eben so hoch zu werten als vorher, d. h. $= x$, und daher ist die Wahrscheinlichkeit, daß ich N erhalte (nach Def. 5) immer noch $\frac{x}{N}$ oder $\frac{P}{b}$. Aber nach jener

Entdeckung ist die Wahrscheinlichkeit, daß ich N erhalte, die Wahrscheinlichkeit, daß das erste der zwei zusammenhängenden Ereignisse eingetreten ist, unter der Voraussetzung, daß das zweite eingetreten ist, wofür also die Wahrscheinlichkeit den oben angegebenen Wert erhält. Nun ist die Wahrscheinlichkeit, daß ein Ereignis eingetreten ist, dieselbe wie die Wahrscheinlichkeit, daß ich recht habe, wenn ich sein Eintreten vermute. Hiernach ist der folgende Lehrsatz einleuchtend.

Lehrsatz 5.

Wenn von zwei zusammenhängenden Ereignissen die Wahrscheinlichkeit für das zweite $\frac{b}{N}$ *und die Wahrscheinlichkeit für beide zusammen* $\frac{P}{N}$ *ist, und man entdeckt, daß das zweite Ereignis wirklich eingetreten ist, so ist für die Richtigkeit der Vermutung, daß das erste Ereignis ebenfalls eingetreten ist, die Wahrscheinlichkeit* $\frac{P}{b}$.

Lehrsatz 6.

Die Wahrscheinlichkeit, daß mehrere unabhängige Ereignisse zusammen eintreten, ist ein Verhältnis, das sich aus den Wahrscheinlichkeiten aller einzelnen Ereignisse zusammensetzt.

Denn nach der Natur unabhängiger Ereignisse wird die Wahrscheinlichkeit, daß eines eintritt, nicht durch das Eintreten oder Ausbleiben eines der übrigen beeinflußt, und folglich ist die Wahrscheinlichkeit, daß das zweite Ereignis eintritt, unter der Voraussetzung, daß dies für das erste der Fall ist, dieselbe wie seine ursprüngliche Wahrscheinlichkeit. Aber die Wahrscheinlichkeit, daß irgend zwei Ereignisse zusammen eintreten, ist nach Lehrsatz 3 ein Verhältnis, das sich aus der Wahrscheinlichkeit des ersten Ereignisses und der Wahrscheinlichkeit des zweiten unter der Voraussetzung, daß das erste eintritt, zusammensetzt. Deswegen ist die Wahrscheinlichkeit, daß irgend zwei unabhängige Ereignisse beide eintreten, ein Verhältnis, das sich aus der Wahrscheinlichkeit des ersten und der Wahrscheinlichkeit des zweiten zusammensetzt. Und ebenso wird, wenn das erste und zweite Ereignis zusammen als ein Ereignis angesehen werden, die Wahrscheinlichkeit, daß drei voneinander unabhängige Ereignisse zusammen eintreten,

ein Verhältnis, das sich aus der Wahrscheinlichkeit, daß die ersten beiden eintreten, und der Wahrscheinlichkeit des dritten zusammensetzt. Derart kann man fortfahren, wie viele solche Ereignisse auch vorhanden sind, woraus die Richtigkeit der Behauptung erhellt.

Zusatz 1. Wenn mehrere unabhängige Ereignisse vorliegen, so ist die Wahrscheinlichkeit, daß das erste eintritt, das zweite ausbleibt, das dritte ausbleibt, das vierte eintritt usw. ein Verhältnis, das sich zusammensetzt aus der Wahrscheinlichkeit des ersten und der Wahrscheinlichkeit für das Ausbleiben des zweiten und der Wahrscheinlichkeit für das Ausbleiben des dritten und der Wahrscheinlichkeit des vierten usw. Denn das Ausbleiben eines Ereignisses kann immer als das Eintreten des entgegengesetzten Ereignisses angesehen werden.

Zusatz 2. Wenn mehrere unabhängige Ereignisse vorliegen, und die Wahrscheinlichkeit eines jeden a ist, die Wahrscheinlichkeit seines Ausbleiben hingegen b, so ist die Wahrscheinlichkeit, daß das erste eintritt, und das zweite ausbleibt, das dritte wieder ausbleibt, das vierte eintritt usw., gleich $abba \cdots$ Denn wenn nach der Bezeichnungsweise der Algebra a ein Verhältnis und b ein anderes bezeichnet, so bezeichnet $abba$ das Verhältnis, das sich aus den Verhältnissen a, b, b, a zusammensetzt. Dieser Zusatz ist deswegen nur eine andere Formulierung des vorhergehenden.

Definition.

Wenn infolge gewisser Umstände eine Wahrscheinlichkeit dafür entsteht, daß ein bestimmtes Ereignis eintritt, so nenne ich sein Eintreten oder Ausbleiben infolge von diesen Umständen sein Eintreten oder Ausbleiben beim ersten Versuch. Und wenn dieselben Umstände sich aufs neue wiederholen, so nenne ich das Eintreten oder Ausbleiben des Ereignisses infolge von ihnen sein Eintreten oder Ausbleiben beim zweiten Versuch usw., so oft sich dieselben Umstände wiederholen. Hiernach ist es offenkundig, daß das Eintreten oder Ausbleiben desselben Ereignisses bei so und so vielen verschiedenen Versuchen in Wirklichkeit auf das Eintreten oder Ausbleiben so und so vieler verschiedener, unabhängiger Ereignisse, die einander genau ähnlich sind, hinausläuft.

Lehrsatz 7.

Wenn bei jedem einzelnen Versuch die Wahrscheinlichkeit eines Ereignisses a ist und die seines Ausbleibens b, so wird die Wahrscheinlichkeit, daß bei $p+q$ Versuchen das Ereignis p mal eintritt und q mal ausbleibt,

$$Ea^p b^q,$$

wenn E der Koeffizient des Gliedes mit $a^p b^q$ in der Entwicklung des Binomials $(a+b)^{p+q}$ ist.

Denn das Eintreten oder Ausbleiben eines Ereignisses bei verschiedenen Versuchen läßt sich als ebensoviele unabhängige Ereignisse ansehen. Deswegen ist (nach *Zusatz* 2 zu Lehrsatz 6) die Wahrscheinlichkeit, daß das Ereignis beim ersten Versuch eintritt, beim zweiten und dritten ausbleibt, beim vierten wieder eintritt, beim fünften ausbleibt usw. (und so eintritt und ausbleibt, bis es p mal eingetreten und q mal ausgeblieben ist), $abbab$ usw., bis die Anzahl der a p und die Anzahl der b q beträgt, d. h. sie ist $a^p b^q$. Ebenso wird, wenn das Ereignis in irgend einer andern, bestimmten Reihenfolge p mal eintritt und q mal ausbleibt, die Wahrscheinlichkeit hierfür $a^p b^q$. Aber die Anzahl der verschiedenen Reihenfolgen, in denen ein Ereignis eintreten und ausbleiben kann, so daß es im ganzen bei $p+q$ Versuchen p mal eintritt und q mal ausbleibt, ist gleich der Anzahl der Permutationen, welche die Elementenfolge

$$aaa \cdots abb \cdots b$$

zuläßt, wenn die Anzahl der a p und die Anzahl der b q beträgt. Und diese Zahl ist gleich E, dem Koeffizienten des Gliedes, in welchem $a^p b^q$ vorkommt, wenn $(a+b)^{p+q}$ entwickelt wird. Das Ereignis kann deshalb bei $p+q$ Versuchen auf E und nicht mehr verschiedene Arten p mal eintreten und q mal ausbleiben. Sein Eintreten und Ausbleiben auf diese verschiedenen Arten bildet ebensoviel unvereinbare Ereignisse, für deren jedes die Wahrscheinlichkeit $a^p b^q$ ist, und deshalb ist nach Lehrsatz 1 die Wahrscheinlichkeit, daß das Ereignis auf die eine oder andere Art bei $p+q$ Versuchen p mal eintritt und q mal ausbleibt,

$$Ea^p b^q.$$

Zweiter Abschnitt.

1. Annahme. Ich setze voraus, daß eine ebene quadratische Tafel oder Platte so angefertigt und aufgestellt sei, daß, wenn eine der Kugeln O oder W auf sie geworfen wird, dieselbe Wahrscheinlichkeit dafür besteht, daß die Kugel auf irgend einen Teil der Platte fällt, wie daß sie auf einen andern gleichgroßen Teil fällt, und daß sie notwendigerweise irgendwo auf der Platte zu liegen kommen muß.

2. Annahme. Ich setze voraus, daß die Kugel W zuerst geworfen wird, und durch den Punkt, wo sie zu liegen kommt, eine Linie os parallel zu AD gezogen wird, die CD und AB in s und o trifft, daß darauf die Kugel O $p+q$ oder n mal geworfen wird, und daß, wenn sie nach einem einzelnen Wurf zwischen AD und os zu liegen kommt, dies das Eintreten des Ereignisses M bei einem einzelnen Versuch genannt wird. Dies vorausgesetzt, beweise ich den folgenden

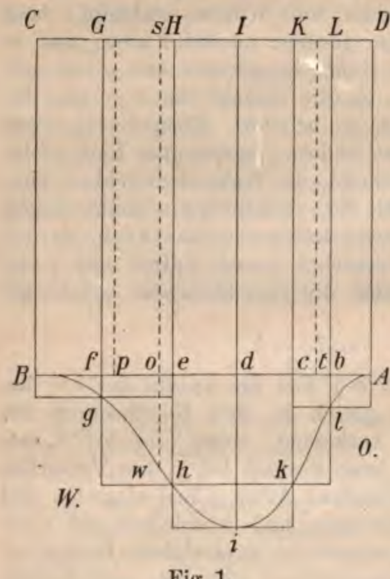


Fig. 1.

Hilfssatz 1. Die Wahrscheinlichkeit, daß der Punkt o zwischen zwei Punkte auf der Strecke AB fällt, ist das Verhältnis zwischen dem Abstande der beiden Punkte und der ganzen Strecke AB.

Man bezeichne irgend zwei Punkte auf der Strecke AB mit f und b und ziehe durch sie die Parallelen zu AD, die CD in G und L treffen. Wenn dann die Rechtecke Cf, Gb, LA (sie sind jedesmal durch ein Paar diametral gegenüberliegender Ecken bezeichnet) kommensurabel sind, so können sie alle drei in eine Anzahl gleicher Teile von derselben Größe

geteilt werden. Wenn dies geschehen ist, und die Kugel W geworfen wird, so wird die Wahrscheinlichkeit, daß die Kugel irgendwo auf irgendeiner Anzahl dieser gleichen Teile zu liegen kommt, die Summe der Wahrscheinlichkeiten dafür, daß sie auf einen einzelnen dieser Teile fällt, denn daß sie beim Niederfallen auf irgendwelchen verschiedenen Teilen der Platte AC zu liegen kommt, stellt ebensoviel unvereinbare Ereignisse dar. Die Summe nun ist, weil die Wahrscheinlichkeit, daß die Kugel auf den einen oder andern Teil fällt, die gleiche ist, die Wahrscheinlichkeit dafür, daß die Kugel auf irgend einen der gleichen Teile fällt, multipliziert mit der Anzahl der in Betracht gezogenen Teile. Folglich wird die Wahrscheinlichkeit, daß die Kugel irgendwo auf Gb zu liegen kommt, gleich der Wahrscheinlichkeit, daß sie auf einen der einander gleichen Teile zu liegen kommt, multipliziert mit der Anzahl der Teile, die in Gb enthalten sind; und die Wahrscheinlichkeit, daß die Kugel irgendwo auf Cf oder LA, d. h. nicht auf Gb (da sie irgendwo auf der Platte zu liegen kommen muß), zu liegen kommt, ist die Wahrscheinlichkeit, daß sie auf einem der gleichen Teile zu liegen kommt, multipliziert mit der Anzahl der Teile, die in Cf und LA zusammengenommen enthalten sind. Somit verhält sich die Wahrscheinlichkeit, daß die Kugel auf Gb fällt, zu der Wahrscheinlichkeit des Gegenteils wie die Anzahl der gleichen Teile in Gb zu der Anzahl der gleichen Teile in Cf und LA zusammengenommen oder wie Gb zu $Cf + LA$ oder wie fb zu $Bf + Ab$. Und durch inverse Komposition findet man: die Wahrscheinlichkeit, daß die Kugel auf Gb fällt, verhält sich zu derselben Wahrscheinlichkeit zusammengenommen mit der Wahrscheinlichkeit, daß die Kugel nicht auf Gb fällt, wie fb zu AB oder wie das Verhältnis von fb zu AB zu dem Verhältnisse von AB zu AB. Aber die Wahrscheinlichkeit eines Ereignisses zusammen mit der Wahrscheinlichkeit seines Gegenteils ist das Verhältnis der Gleichheit; deswegen verhält sich die Wahrscheinlichkeit, daß die Kugel auf Gb fällt zu dem Verhältnis der Gleichheit wie das Verhältnis von fb zu AB zu dem Verhältnis von AB zu AB oder dem Verhältnis der Gleichheit, und somit ist die Wahrscheinlichkeit, daß die Kugel auf Gb fällt, das Verhältnis von fb zu AB. Aber nach Voraussetzung liegt der Punkt o zwischen f und b oder tut es nicht, je nachdem die Kugel W auf Gb fällt oder nicht, und deshalb ist die Wahrscheinlichkeit, daß Punkt o zwischen f und b liegt, das Verhältnis von fb zu AB.

Wenn nun die Rechtecke Cf, Gb, LA nicht kommensurabel sind, so kann doch die letztgenannte Wahrscheinlichkeit nicht kleiner und größer als das Verhältnis von fb zu AB sein. Denn, wenn sie kleiner ist, so sei sie das Verhältnis von fc zu AB (wo c zwischen f und b liegt). Dann nehme man auf der Strecke fb die Punkte p und t an, so daß pt größer als fc wird, und die drei Strecken Bp, pt, tA kommensurabel sind. (Dies ist offenbar immer zu erreichen, indem man AB in gleiche Teile teilt, die kleiner als die Hälfte von cb sind, und für p und t die Teilpunkte wählt, die auf der Strecke fb den Punkten f und b am nächsten liegen.) Weil dann Bp, pt, tA kommensurabel sind, sind es auch die Rechtecke Cp, Dt und das Rechteck über pt, welches das Quadrat AC vervollständigt. Somit ist nach dem Gesagten die Wahrscheinlichkeit, daß der Punkt o zwischen p und t zu liegen kommt, das Verhältnis von pt zu AB. Wenn er aber zwischen p und t liegt, muß er zwischen f und b liegen. Deshalb kann die Wahrscheinlichkeit, daß er zwischen f und b liegt, nicht kleiner sein als das Verhältnis von pt zu AB und muß deshalb größer als das Verhältnis von fc zu AB sein (da pt größer als fc ist). Auf dieselbe Art kann man beweisen, daß die genannte Wahrscheinlichkeit nicht größer als das Verhältnis von fb zu AB sein kann, sie muß daher diesem Verhältnisse gleich sein.

Hilfssatz 2. Wenn die Kugel W geworfen und die Linie os gezogen ist, so wird die Wahrscheinlichkeit des Ereignisses M bei einem einzelnen Versuch das Verhältnis von Ao zu AB.

Denn ebenso wie bei dem vorhergehenden Hilfssatz ist die Wahrscheinlichkeit, daß die Kugel O, wenn sie geworfen wird, irgendwo auf dem Rechteck Do oder zwischen AD und so zu liegen kommt, das Verhältnis von Ao zu AB. Aber das Niederfallen der Kugel O zwischen AD und so bei einem einzelnen Wurf ist das Eintreten des Ereignisses M bei einem einzelnen Versuch. So ist der Hilfssatz bewiesen.

Lehrsatz 8.

Es werde über BA die Kurve $BghiklA$ gezeichnet, die folgende Eigenschaft hat. Wird die Basis BA in irgend zwei Teile geteilt wie Ab und Bb, und im Teilpunkt b ein Lot errichtet, das durch die Kurve in l begrenzt wird, bedeuten ferner y, x, z die Verhältnisse von lb, Ab und Bb zu AB, und E den

Koeffizienten des Gliedes mit $a^p b^q$ *in der Entwicklung des Binomials* $(a+b)^{p+q}$, *so soll sein*

$$y = Ex^p z^q.$$

Nun behaupte ich: bevor die Kugel W *geworfen wird, ist die Wahrscheinlichkeit, daß der Punkt* o *zwischen irgend zwei Punkte* f *und* b *der Strecke* AB *zu liegen kommt, und gleichzeitig das Ereignis* M *bei* $p+q$ *Versuchen* p *mal eintritt und* q *mal ausbleibt, gegeben durch das Verhältnis der Fläche, die durch die Kurve* $BghiklA$ *über der Linie* AB *zwischen den in* f *und* l *auf* AB *errichteten Loten* fg, bl *begrenzt wird, zu* AC, *d. h. dem Quadrat über der Strecke* AB.

Beweis.

Angenommen, der Satz sei nicht richtig, so möge das Verhältnis gleich dem von D, d. h. einer Fläche, die größer ist als $fghiklb$, zu dem Quadrat AC sein. In den Punkten e, d, c denken wir uns die Lote auf fb errichtet und nennen h, i, k die Punkte, in denen sie die Kurve treffen. Hierbei soll der Punkt d so liegen, daß di das längste der durch die Linie fb und die Kurve begrenzten Perpendikel ist, und die Punkte e, d, c sollen in solcher Zahl und solcher Lage angenommen sein, daß die Summe der Rechtecke bk, ci, ei, fh von dem Flächeninhalte $fghiklb$ weniger abweicht als D; alles dies ist mit Hilfe der Kurvengleichung und der gegebenen Differenz zwischen D und der Fläche $fghiklb$ leicht zu erreichen. Denn da di die größte der Kurvenordinaten ist, so müssen die übrigen kleiner und kleiner werden, je weiter sie sich von dieser Ordinate nach der einen oder andern Seite entfernen, was aus der Definition der Kurve unmittelbar hervorgeht; und folglich ist eh größer als fg oder irgend eine andere Ordinate über ef.

Wenn nun Ao gleich Ae wäre, so würde nach Hilfssatz 2 die Wahrscheinlichkeit des Ereignisses M bei einem einzelnen Versuche das Verhältnis von Ae zu AB sein, und folglich würde nach dem Zusatz zu Lehrsatz 1 die Wahrscheinlichkeit seines Ausbleibens das Verhältnis von Be zu AB sein. Wenn demnach x und z die beiden erwähnten Verhältnisse sind, so wird nach Lehrsatz 7 die Wahrscheinlichkeit, daß bei $p+q$ Versuchen das Ereignis M p mal eintritt und q mal ausbleibt, $Ex^p z^q$. Aber da x und z bzw. die Verhältnisse von Ae zu AB und Be zu AB sind, so wird, wenn y das Verhältnis

von eh zu AB bezeichnet, $y = Ex^p z^q$, denn so ist die Figur angelegt worden. Wenn deshalb Ao gleich Ae wäre, so würde die Wahrscheinlichkeit, daß bei $p + q$ Versuchen das Ereignis M $p$mal eintritt und $q$mal ausbleibt, y oder das Verhältnis von eh zu AB sein. Und wenn Ao gleich Af oder einem mittleren Werte zwischen Ae und Af wäre, so würde die letztgenannte Wahrscheinlichkeit aus denselben Gründen das Verhältnis von fg, oder einer andern der Ordinaten über ef, zu AB sein. Aber eh ist die größte der Ordinaten, die über ef stehen. Darum kann unter der Voraussetzung, daß der Punkt irgendwo zwischen f und e liegt, die Wahrscheinlichkeit, daß das Ereignis M bei $p + q$ Versuchen $p$mal eintritt und $q$mal ausbleibt, nicht größer sein als das Verhältnis von eh zu AB. Da nun hier zwei zusammenhängende Ereignisse vorliegen, das erste, daß der Punkt o zwischen e und f liegt, das zweite, daß bei $p + q$ Versuchen das Ereignis M $p$mal eintritt und $q$mal ausbleibt, und die Wahrscheinlichkeit des ersten (nach Hilfssatz 1) das Verhältnis von ef zu AB ist, und unter der Voraussetzung, daß das erste Ereignis eintritt, die Wahrscheinlichkeit des zweiten nicht größer als das Verhältnis von eh zu AB sein kann, so folgt (aus Lehrsatz 3): die Wahrscheinlichkeit, daß beide Ereignisse zusammen eintreten, kann nicht größer sein als das aus den Verhältnissen von ef zu AB und von eh zu AB zusammengesetzte Verhältnis, d. h. das Verhältnis der Flächen fh und AC. Somit ist die Wahrscheinlichkeit, daß der Punkt o zwischen f und e zu liegen kommt, und das Ereignis M $p$mal eintritt und $q$mal ausbleibt, nicht größer als das Verhältnis der Rechtecke fh und AC. Ebenso kann die Wahrscheinlichkeit, daß der Punkt o zwischen e und d liegt, und das Ereignis M eintritt und ausbleibt wie zuvor, nicht größer sein als das Verhältnis der Rechtecke ei und AC. Weiter kann die Wahrscheinlichkeit, daß der Punkt o zwischen d und c liegt, und das Ereignis M eintritt und ausbleibt wie zuvor, nicht größer sein als das Verhältnis ci zu AC. Und schließlich kann die Wahrscheinlichkeit, daß der Punkt o zwischen c und b liegt, und das Ereignis M eintritt und ausbleibt wie zuvor, nicht größer sein als das Verhältnis von bk zu AC. Addiert man nun alle diese verschiedenen Wahrscheinlichkeiten zueinander, so ergibt ihre Summe (nach Lehrsatz 1) die Wahrscheinlichkeit dafür, daß der Punkt irgendwo zwischen f und b liegt und das Ereignis M bei $p + q$ Versuchen $p$mal eintritt und $q$mal aus-

bleibt. Addiert man ebenso die korrespondierenden Verhältnisse, so wird ihre Summe das Verhältnis der Summe der Vorderglieder zu dem gemeinsamen Hintergliede, d. h. der Summe von fh, ei, ci, bk zu AC. Dieses Verhältnis aber ist kleiner als das von D zu AC, weil D größer ist als fh, ei, ci, bk zusammengenommen. Deshalb ist die Wahrscheinlichkeit, daß der Punkt o zwischen f und b fällt und zugleich das Ereignis M bei $p+q$ Versuchen p mal eintritt und q mal ausbleibt, kleiner als das Verhältnis von D zu AC, aber es war diesem gleich vorausgesetzt, was absurd ist. Auf dieselbe Weise kann man, indem man dem Kurvenstück Rechtecke wie eg, dh, dk, cl einbeschreibt, beweisen, daß die letztgenannte Wahrscheinlichkeit größer ist als das Verhältnis irgend einer Figur, die kleiner ist als $fghiklb$, zu AC. Deshalb muß diese Wahrscheinlichkeit das Verhältnis selbst von $fghiklb$ zu CA sein.

Zusatz. Bevor die Kugel W geworfen ist, ist die Wahrscheinlichkeit, daß der Punkt o irgendwohin auf die Linie AB fällt und sodann das Ereignis M bei $p+q$ Versuchen p mal eintritt und q mal ausbleibt, das Verhältnis der ganzen Fläche AiB zu AC. Aber es ist gewiß, daß der Punkt o irgendwo auf AB liegen wird. Deshalb ist, bevor die Kugel W geworfen, die Wahrscheinlichkeit, daß das Ereignis M p mal eintritt und q mal ausbleibt, das Verhältnis der von der Kurve begrenzten Fläche AiB zu dem Quadrate AC.

Lehrsatz 9.

Wenn, bevor irgend etwas über die Lage des Punktes o bekannt ist, es sich herausstellen sollte, daß das Ereignis M bei $p+q$ Versuchen p mal eingetreten und q mal ausgeblieben ist, und ich hiernach vermute, daß der Punkt o zwischen irgend zwei Punkten b und f auf AB liegt, und daß folglich die Wahrscheinlichkeit des Ereignisses M bei einem einzelnen Versuche irgendwo zwischen dem Verhältnisse von Ab zu AB und dem von Af zu AB liegt, so ist die Wahrscheinlichkeit, daß ich recht habe, das Verhältnis desjenigen Teiles der von der Kurve begrenzten Fläche AiB, welcher zwischen den auf AB in b und f errichteten Perpendikeln liegt, zu der ganzen Fläche AiB.

Denn da die beiden aufeinander folgenden Ereignisse vorliegen: erstens, daß der Punkt o zwischen b und f fällt,

und zweitens, daß das Ereignis M bei $p + q$ Versuchen $p$mal eintritt und $q$mal ausbleibt, und da (nach Zusatz zu Lehrsatz 8) die ursprüngliche Wahrscheinlichkeit des zweiten Ereignisses das Verhältnis von AiB zu AC und (nach Lehrsatz 8) die Wahrscheinlichkeit beider Ereignisse zusammen das Verhältnis von $fghiklb$ zu AC ist, so ist (nach Lehrsatz 5), wenn es sich zuerst herausstellt, daß das zweite Ereignis eingetreten ist, und ich hiernach vermute, daß das erste Ereignis ebenfalls eingetreten ist, die Wahrscheinlichkeit, daß ich recht habe, das Verhältnis von $fghiklb$ zu AiB, was zu beweisen war.

Zusatz. Wenn ich, unter denselben Voraussetzungen, vermute, die Wahrscheinlichkeit des Ereignisses M liege irgendwo zwischen 0 und dem Verhältnisse von Ab zu AB, so ist meine Chance, daß ich recht habe, das Verhältnis von Abl zu AiB.

Erläuterung.

Nach dem vorstehenden Lehrsatze ist klar, daß man im Falle eines Ereignisses von der Art des dort als M bezeichneten lediglich aus der Anzahl Male, die es bei einer bestimmten Menge von Versuchen eintritt und ausbleibt, ohne irgend etwas weiteres über die Natur des Ereignisses zu wissen, einen Schluß auf die ungefähre Größe seiner Wahrscheinlichkeit ziehen und, indem man nach den gewöhnlichen Methoden die dort angewandten Flächen berechnet, die Wahrscheinlichkeit, daß die Vermutung richtig ist, ermitteln kann. Daß dieselbe Regel auch geeignet ist, um in dem Falle irgendwelchen Ereignisses zu dienen, über dessen Wahrscheinlichkeit wir von vornherein durchaus nichts wissen, scheint aus der folgenden Überlegung hervorzugehen. Betreffs eines solchen Ereignisses habe ich keinen Grund zu vermuten, daß es bei einer bestimmten Anzahl von Versuchen eher eine gewisse Anzahl Male als eine andere eintreten würde. Denn ich kann in dieser Beziehung genau so überlegen, als ob die Wahrscheinlichkeit zuerst unbestimmt gewesen wäre und dann so bestimmt worden wäre, daß kein Anlaß zu der Annahme vorliegt, bei einer gewissen Anzahl von Versuchen werde das Ereignis irgend eine mögliche Anzahl Male eher als eine andere eintreten. Dies ist aber genau der Fall bei dem Ereignis M. Denn bevor die Kugel W geworfen wird, was die Wahrscheinlichkeit für das Eintreten des Ereignisses M bei einem einzelnen Versuch bestimmt (nach

Zusatz zu Lehrsatz 8), ist die Wahrscheinlichkeit, daß das Ereignis bei $n = p + q$ Versuchen p mal eintritt und q mal ausbleibt, das Verhältnis von AiB zu AC, und dieses Verhältnis ist, wenn $n = p + q$ gegeben ist, dasselbe, was auch der Wert von p sei, wie man sofort findet, wenn man die Fläche AiB nach den Methoden der Infinitesimalrechnung bestimmt. Und folglich kann ich, bevor die Lage des Punktes o gefunden ist oder die Anzahl Male, die das Ereignis M bei n Versuchen eingetreten ist, keinen Grund haben zu denken, es werde irgend eine mögliche Anzahl Male eher als eine andere eintreten.

Im folgenden werde ich deswegen als zugegeben ansehen, daß die in betreff des Ereignisses M in Lehrsatz 9 gegebene Regel auch die Regel ist, die in Beziehung auf irgend ein Ereignis zu verwenden ist, von dessen Wahrscheinlichkeit vor irgendwelchen diesbezüglichen Versuchen oder Beobachtungen schlechterdings nichts bekannt ist. Und ein solches Ereignis werde ich ein unbekanntes Ereignis nennen.

Zusatz. Wenn wir uns demnach die Ordinaten bei der Kurve AiB im Verhältnis von E zu 1 verkleinert denken, was in dem Verhältnis der einzelnen Teile der Figur zwischen den Ordinaten zueinander keinen Unterschied bedingt, und das von dem Ereignis M Gesagte auf irgend ein unbekanntes Ereignis anwenden, so haben wir den folgenden Lehrsatz, der die Regel liefert, um die Wahrscheinlichkeit eines Ereignisses aus der Anzahl Male, die es wirklich eingetreten und ausgeblieben ist, zu finden.

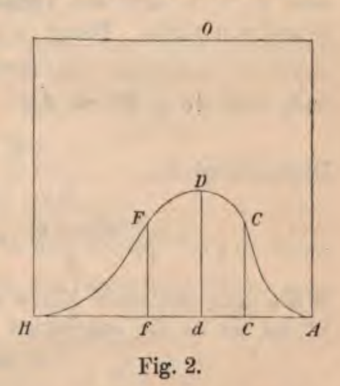


Fig. 2.

Lehrsatz 10.

Wenn über einer beliebigen Basis AH (Figur 2) *die Kurve beschrieben wird, deren Gleichung lautet*

$$y = x^p z^q,$$

indem y, x, z der Reihe nach die Verhältnisse sind der (auf der Basis senkrecht stehenden) Ordinate eines Kurvenpunktes, des Abschnittes auf der Basis zwischen dieser Ordinate und dem Anfangspunkte A der Basis und des andern Abschnittes der Basis

zwischen der Ordinate und dem Endpunkte H zu der ganzen Basis als ihrem gemeinsamen Hintergliede, dann behaupte ich, daß, wenn ein unbekanntes Ereignis bei $p+q$ Versuchen p mal eingetreten und q mal ausgeblieben ist, und in zwei Punkten c und f der Basis AH die Ordinaten cC, fF errichtet werden, die Chance, daß die Wahrscheinlichkeit des Ereignisses irgendwo zwischen dem Verhältnis von Ac zu AH und dem Verhältnis von Af zu AH liegt, das Verhältnis ist von $fFCc$, d. h. dem Teil der vorher beschriebenen Figur, der zwischen den beiden Ordinaten eingeschlossen ist, zu $ACFH$, d. h. der ganzen über der Basis AH durch die Kurve begrenzten Fläche.

Dies ist einleuchtend nach Lehrsatz 9 und den Bemerkungen, die in der vorstehenden Erläuterung und dem Zusatz dazu gemacht sind.

Um nun die gegebene Regel praktisch brauchbar zu machen, müssen wir den von der Kurve begrenzten Flächeninhalt und die von ihm durch die verschiedenen Ordinaten abgeschnittenen Stücke einzeln berechnen.

1. Zu diesem Zwecke setze man $AH = 1$ und die Fläche des Quadrates HO über AH ebenfalls $= 1$ voraus, dann wird

$$Cc = y\,, \quad Ac = x\,, \quad Hc = z\,,$$

weil y, x, z bzw. die Verhältnisse von Cc, Ac, Hc zu AH bezeichnen sollen. Ferner wird nach der Gleichung der Kurve

$$y = x^p z^q$$

und, weil $Ac + Hc = AH$,

$$x + z = 1\,.$$

Demnach wird

$$y = x^p (1-x)^q$$

$$= x^p - qx^{p+1} + \frac{q(q-1)}{2} x^{p+2} - \frac{q(q-1)(q-2)}{2 \cdot 3} x^{p+3} + \cdots$$

Wenn nun bei einer Kurve die Abszisse x und die Ordinate x^p ist, so ist die zugehörige Fläche

$$\frac{x^{p+1}}{p+1},$$

und wenn die Ordinate qx^{p+1} ist, wird die Fläche

$$\frac{qx^{p+2}}{p+2}$$

usw. Wenn deshalb die Abszisse x ist und die Ordinate

$$y = x^p - q x^{p+1} + \frac{q(q-1)}{2} x^{p+2} \ldots,$$

so wird die zugehörige Fläche

$$\frac{x^{p+1}}{p+1} - q\frac{x^{p+2}}{p+2} + \frac{q(q-1)}{2}\,\frac{x^{p+3}}{p+3} \cdots$$

Demgemäß wird, wenn

$$x = Ac = \frac{Ac}{AH}, \quad y = Ce = \frac{Ce}{AH},$$

die Fläche

$$ACe = \frac{ACe}{HO} = \frac{x^{p+1}}{p+1} - q\frac{x^{p+2}}{p+2} + \frac{q(q-1)}{2}\,\frac{x^{p+3}}{p+3} - \cdots$$

Aus dieser Gleichung kann man, wenn q eine kleine Zahl ist, leicht den Wert des Verhältnisses von ACe zu HO finden. Ebenso ergibt sich nach demselben Verfahren das Verhältnis

$$\frac{HCe}{HO} = \frac{z^{q+1}}{q+1} - p\frac{z^{q+2}}{q+2} + \frac{p(p-1)}{2}\,\frac{z^{q+3}}{q+3} - \cdots$$

Diese Reihe besteht nur aus wenigen Gliedern, wenn p klein ist, und ist deshalb dann anzuwenden.

2. Unter denselben Voraussetzungen wie zuvor wird das Verhältnis ACe zu HO auch durch den folgenden Ausdruck gegeben:

$$\frac{x^{p+1}z^q}{p+1} + \frac{q\cdot x^{p+2}z^{q-1}}{(p+1)(p+2)} + \frac{q(q-1)\cdot x^{p+3}z^{q-2}}{(p+1)(p+2)(p+3)} + \cdots$$
$$+ \frac{q(q-1)\cdots 1\cdot x^{p+q+1}}{(p+1)(p+2)\cdots(p+q)(p+q+1)}.$$

Um dies nachzuweisen, bilden wir das Differential dieses Ausdruckes

$$x^p z^q\,dx + \frac{q x^{p+1} z^{q-1}}{p+1}\,dz + \frac{q x^{p+1} z^{q-1}}{p+1}\,dx$$
$$+ \frac{q(q-1)\,x^{p+2}z^{q-2}}{(p+1)(p+2)}\,dz + \frac{q(q-1)\,x^{p+2}z^{q-2}}{(p+1)(p+2)}\,dx$$
$$+ \frac{q(q-1)(q-2)\,x^{p+3}z^{q-3}}{(p+1)(p+2)(p+3)}\,dz + \cdots$$

Aus $z = 1 - x$ folgt aber

$$dz = -dx;$$

setzt man dies ein, so zerstören sich alle Glieder paarweise mit Ausnahme des ersten. Es ist also die Derivierte des angeschriebenen, als Funktion von x aufgefaßten Ausdruckes gleich

$$x^p (1-x)^q,$$

und der Ausdruck verschwindet ferner für $x = 0$. Er stellt also in der Tat die zu berechnende Fläche dar.

3. Auf dieselbe Weise wird das Verhältnis von HCc zu HO gleich

$$\frac{z^{q+1} x^p}{q+1} + \frac{p \cdot z^{q+2} x^{p-1}}{(q+1)(q+2)} + \frac{p(p-1) \cdot z^{q+3} x^{p-2}}{(q+1)(q+2)(q+3)} + \cdots$$

4. Wenn in der Entwicklung des Binomials $(a+b)^{p+q}$ der Koeffizient des Gliedes, das $a^p b^q$ enthält, mit E bezeichnet wird, so wird das Verhältnis des ganzen Flächeninhaltes $ACFH$ zu dem Quadrat HO gleich

$$\frac{1}{n+1} \cdot \frac{1}{E},$$

für $n = p + q$. Denn wenn $Ac = AH$, wird

$$x = 1, \quad z = 0,$$

und deshalb verschwinden in dem Ausdrucke, der in Art. 2 für das Verhältnis von ACc zu HO gegeben ist, alle Glieder mit Ausnahme des letzten, und dieses wird

$$\frac{1}{n+1} \cdot \frac{q}{p+1} \cdot \frac{q-1}{p+2} \cdots\cdots \frac{1}{n}.$$

Aber der Koeffizient E des Gliedes mit $a^p b^q$ in der Entwicklung von $(a+b)^n$ ist

$$\frac{p+1}{q} \cdot \frac{p+2}{q-1} \cdots\cdots \frac{n}{1}.$$

Und weil wir voraussetzen, daß $Ac = AH$ ist, wird $ACc = ACH$. Hiermit ist die vorangestellte Behauptung erwiesen.

5. Das Verhältnis von ACc zu dem ganzen Flächeninhalte $ACFH$ ist (nach Art. 1 und 4) gleich

$$(n+1) \cdot E \cdot \left[\frac{x^{p+1}}{p+1} - q \cdot \frac{x^{p+2}}{p+2} + \frac{q(q-1)}{2} \cdot \frac{x^{p+3}}{p+3} - \cdots\right].$$

Es soll nun, wie x das Verhältnis von Ac zu AH bezeichnet, X das Verhältnis von Af zu AH ausdrücken, dann wird das Verhältnis von AFf zu $ACFH$

$$= (n+1)\cdot E\cdot\left[\frac{X^{p+1}}{p+1} - q\cdot\frac{X^{p+2}}{p+2} + \frac{q(q-1)}{2}\cdot\frac{X^{p+3}}{p+3} - \cdots\right]$$

und folglich das Verhältnis von $fFCc$ zu $ACFH$

$$= (n+1)\cdot E\cdot \text{Differenz der beiden Reihen.}$$

Halten wir dies mit Lehrsatz 10 zusammen, so haben wir die folgende praktische Regel:

Regel I.

Wenn in betreff eines Ereignisses nichts bekannt ist, als daß es bei $p+q$ oder n Versuchen p mal eingetreten und q mal ausgeblieben ist, und ich hiernach vermute, daß die Wahrscheinlichkeit seines Eintretens bei einem einzelnen Versuch zwischen irgend zwei Graden der Wahrscheinlichkeit X und x liegt, so ist die Chance, daß ich mit meiner Vermutung recht habe, gleich

$$(n+1)\cdot E\cdot\left[\left(\frac{X^{p+1}}{p+1} - q\frac{X^{p+2}}{p+2} + \frac{q(q-1)}{2}\cdot\frac{X^{p+3}}{p+3} - \cdots\right)\right.$$
$$\left. - \left(\frac{x^{p+1}}{p+1} - q\frac{x^{p+2}}{p+2} + \frac{q(q-1)}{2}\cdot\frac{x^{p+3}}{p+3} - \cdots\right)\right],$$

indem E den Koeffizienten des Gliedes mit $a^p b^q$ in der Entwicklung von $(a+b)^n$ bezeichnet.

Dies ist die zur Verwendung geeignete Regel, wenn q eine kleine Zahl ist. Wenn dagegen q groß ist und p klein, so vertausche man in den angeschriebenen Reihen überall p mit q und ersetze x durch $z = 1 - x$, X durch $Z = 1 - X$, wodurch keine Änderung in der Differenz der beiden Reihen hervorgerufen wird.

[Jede der in der vorstehenden Regel gegebenen Reihen besteht aus $q+1$ (bzw. $p+1$) Gliedern, und die Anwendung der Regel verlangt die Berechnung aller dieser Glieder. Hieraus ist zu sehen, daß die Anwendung der Regel außerordentlich mühsam wird, sowie die Zahlen q, p und damit auch n, d. h. die Zahl der beobachteten Fälle, groß wird. Wenn dies eintritt, ist die gegebene Regel einer Umformung zu unterwerfen, die gestattet, mit geringerer Mühe die in Rede stehende Chance auszuwerten. Dieser Umformung ist das folgende gewidmet.]

Zweites Stück.

(Philosophical Transactions, Vol. 54, 1764, pp. 298—310.)

1. Wenn die Kurve ADH durch die Ordinate Dd so in zwei Teile geteilt wird, daß sich Ad zu Hd verhält wie p zu q, und man dann

$$a = \frac{p}{n}, \quad b = \frac{q}{n}$$

macht, so wird das Verhältnis der Fläche ADd zu dem Quadrate HO:

$$\frac{a^{p+1} b^q}{p+1}\left[1 + \frac{q}{p+2} \cdot \frac{p}{q} + \frac{q(q-1)}{(p+2)(p+3)} \cdot \frac{p^2}{q^2} + \frac{q(q-1)(q-2)}{(p+2)(p+3)(p+4)} \cdot \frac{p^3}{q^3} + \cdots\right].$$

Denn in diese Reihe geht die Reihe

$$\frac{x^{p+1} z^q}{p+1} + \frac{q}{p+1} \cdot \frac{x^{p+2} z^{q-1}}{p+2} + \cdots,$$

die oben in Art. 2 für das Verhältnis von ACc zu HO gegeben ist, über, wenn man

$$x = a = \frac{p}{n}, \quad z = b = \frac{q}{n}$$

setzt, d. h. wenn Cc mit Dd zusammenfällt und ACc zu ADd wird. Ebenso geht aus Art. 3 hervor, daß das Verhältnis von HDd zu HO das folgende ist:

$$\frac{a^p b^{q+1}}{q+1}\left[1 + \frac{p}{q+2} \cdot \frac{q}{p} + \frac{p(p-1)}{(q+2)(q+3)} \cdot \frac{q^2}{p^2} + \cdots\right].$$

Hieraus folgt für das Verhältnis der Differenz von ADd und HDd zu HO:

$$\frac{a^p b^q}{n}\left[\left(\frac{p}{p+1}+\frac{q}{p+1}\cdot\frac{p^2}{(p+2)q}+\frac{q(q-1)}{(p+1)(p+2)}\cdot\frac{p^3}{(p+3)q^2}+\cdots\right)\right.$$
$$\left.-\left(\frac{q}{q+1}+\frac{p}{q+1}\cdot\frac{q^2}{(q+2)p}+\frac{p(p-1)}{(q+1)(q+2)}\cdot\frac{q^3}{(q+3)p^2}+\cdots\right)\right].$$

Dieser Ausdruck gilt, wenn ADd größer als HDd ist. Ist aber HDd größer als ADd, so ist die erste Reihe von der zweiten zu subtrahieren.

2. [Das m^{te} Glied der Reihe in der ersten runden Klammer ist

$$\frac{q(q-1)\cdots(q-m+2)}{(p+1)(p+2)\cdots(p+m)}\cdot\frac{p^m}{q^{m-1}},$$

das $(m+2)^{\text{te}}$ Glied der Reihe in der zweiten runden Klammer dagegen

$$\frac{p(p-1)\cdots(p-m+1)(p-m)}{(q+1)(q+2)\cdots(q+m+1)(q+m+2)}\cdot\frac{q^{m+2}}{p^{m+1}}.]$$

Es ergibt sich demnach für das Verhältnis eines Gliedes in der ersteren Reihe zu dem auf das korrespondierende Glied in der letzteren Reihe an zweiter Stelle folgenden Gliede [der Ausdruck

$$\frac{q+m+2}{p+m}\cdot\frac{q+m+1}{p+m-1}\cdots\frac{q+1}{p-1}\cdot\frac{q}{p-2}\cdots\frac{q-m+2}{p-m}\cdot\frac{p^{2m+1}}{q^{2m+1}}$$

oder anders geordnet

$$\frac{q+1}{q}\cdot\frac{q+2}{q}\cdot\frac{p}{p+1}\cdot\frac{q+3}{p-1}\cdot\frac{p}{q}\cdot\frac{p}{p+2}\cdot\frac{q+4}{p-2}\cdot\frac{p}{q}\cdots,$$

wofür man auch schreiben kann]

$$\frac{pq+p}{pq}\cdot\frac{pq+2p}{pq}\cdot\frac{pq}{pq+q}\cdot\frac{pq+3p}{pq-q}\cdot\frac{pq}{pq+2q}\cdot\frac{pq+4p}{pq-2q}$$
$$\cdot\frac{pq-p}{pq+3q}\cdot\frac{pq+5p}{pq-3q}\cdot\frac{pq-2p}{pq+4q}\cdot\frac{pq+6p}{pq-4q}\cdots.$$

Die Zahl der Glieder beträgt [$2m+2$ oder $2(m-1)+4$, also] vier mehr als die doppelte Anzahl der Glieder, um

welche das in Betracht gezogene Glied der ersteren Reihe von dem ersten Glied dieser Reihe entfernt ist. [Wenn wir nun die Faktoren des zuletzt angeschriebenen Produktes mit Ausnahme der beiden ersten paarweise vereinigen, so erhalten wir

$$\frac{pq+p}{pq} \cdot \frac{pq+2p}{pq} \cdot \frac{p^2q^2+3p^2q}{p^2q^2-q^2} \cdot \frac{p^2q^2+4p^2q}{p^2q^2-4q^2} \cdots$$

Die Anzahl der Faktoren beträgt jetzt $m+2$, und der $(\mu+2)^{te}$ Faktor lautet

$$\frac{p^2q^2+4p^2q-(\mu^2-4)p^2}{p^2q^2-\mu^2q^2}$$

oder

$$\frac{p^2q^2-\mu^2p^2}{p^2q^2-\mu^2q^2}+\frac{4p^2(q+1)}{(p^2-\mu^2)q^2},$$

wobei μ die Werte 2, 3 usw. bis m annehmen kann. Setzen wir nun $p<q$ voraus, so kann m selbst die Werte von 1 bis $p-1$ annehmen. In dem vorstehenden Ausdrucke wird das erste Glied >1, weil der Zähler größer als der Nenner ist, und das zweite Glied ist positiv, also ist der ganze Ausdruck >1. Ebenso werden die ersten drei Faktoren der in Rede stehenden Faktorenfolge >1, also sind alle Faktoren und damit das ganze Produkt >1. Jedes Glied der ersteren Reihe ist also größer als das mit ihm verglichene Glied der zweiten Reihe.] Wenn man nun von der zweiten Reihe die zwei ersten Glieder fortläßt, die zusammen [$=\frac{2q}{q+2}$, also] kleiner als 2 sind, so ist der Rest kleiner als die erste Reihe, und folglich kann die erste Reihe von der zweiten abgezogen keinen Rest lassen, der $\gtreqless 2$ ist. Demnach muß, wenn $q>p$ ist, nach dem vorigen Art. das Verhältnis der Differenz $HDd-ADd$ zu dem Quadrat $HO<\frac{2a^pb^q}{n}$ sein.

3. Wenn die von der Kurve begrenzte Fläche wie vorher in zwei Teile ADd und HDd geteilt wird, so mögen die Ordinaten Cc und Ff auf beiden Seiten in der gleichen Entfernung von Dd liegen, und r möge das Verhältnis von dc oder df zu AH sein. Wenn dann y, x, z der Reihe nach die Verhältnisse von Cc, Ac und Hc zu AH sind, so wird nach der Natur der Kurve

$$y=x^pz^q.$$

Aber weil das Verhältnis von Ad zu AH a ist und das von dc zu AH r, ist das Verhältnis von $Ad - dc (= Ac)$ zu AH $a - r$. Somit wird

$$a - r = x$$

und auf dieselbe Weise

$$b + r = z.$$

Es ist aber $y = x^p z^q$ und y das Verhältnis von Cc zu AH. Deswegen ist

$$Cc : AH = (a - r)^p (b + r)^q.$$

Und ebenso wird

$$Ff : AH = (a + r)^p (b - r)^q.$$

Folglich ergibt sich

$$Cc : Ff = (a - r)^p (b + r)^q : (a + r)^p (b - r)^q.$$

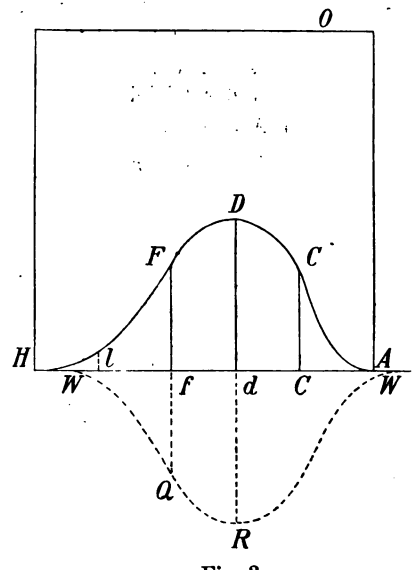


Fig. 3.

4. Wenn q größer als p ist, so ist $(a + r)^p (b - r)^q$ größer als $(a - r)^p (b + r)^q$, und das Verhältnis zwischen diesen Größen nimmt zu, wenn r zunimmt. Denn wenn man in der gewöhnlichen Weise die natürlichen Logarithmen dieser Ausdrücke aufsucht und

$$p = na, \quad q = nb$$

setzt, weil $a = \frac{p}{n}$, $b = \frac{q}{n}$ (s. Art. 1), so findet man für den Logarithmus [des in Rede stehenden Verhältnisses

$$n\left[a \log \frac{1 + \frac{r}{a}}{1 - \frac{r}{a}} - b \log \frac{1 + \frac{r}{b}}{1 - \frac{r}{b}}\right],$$

und wenn man für die Logarithmen die bekannten Reihenentwicklungen einsetzt]

$$2n\left[\frac{b^2-a^2}{3b^2a^2}r^3+\frac{b^4-a^4}{5b^4a^4}r^5+\frac{b^6-a^6}{7b^6a^6}r^7+\cdots\right].$$

Ist nun $q > p$ und deshalb $b > a$, so sind alle Glieder dieses Ausdruckes positiv, und er ist ferner um so größer, je größer r ist, er ist somit der Logarithmus eines Verhältnisses, das größer als das der Gleichheit ist, und mit r zunimmt.

5. Nach Art. 3 ist

$$Ff : Cc = (a+r)^p(b-r)^q : (a-r)^p(b+r)^q,$$

nach Art. 4 ist

$$(a+r)^p(b-r)^q > (a-r)^p(b+r)^q,$$

und das Verhältnis zwischen diesen Größen wächst mit r, wenn $q > p$ ist. Unter dieser Voraussetzung ist also auch

$$Ff > Cc,$$

und das Verhältnis dieser Strecken wächst mit r oder $df = dc$. Folglich gilt dasselbe auch von den Flächen, welche die Ordinaten durchstreichen, wenn ihre gleichen Abszissen df und dc zunehmen. Mithin ist, wenn $q > p$,

$$DdfF > DdcC,$$

und das Verhältnis dieser Flächen wächst mit $df = dc$.

6. Weil

$$Ad : Hd = p : q,$$

wird, wenn $q > p$, auch $Hd > Ad$. Nimmt man also auf Hd den Punkt l so an, daß $dl = Ad$ wird, so ist nach dem vorigen Art. der Teil der Fläche HDd, der über dl steht, größer als ADd, und das Verhältnis dieses Teiles von HDd zu ADd ist größer als das Verhältnis von $DdfF$ zu $DdcC$. Folglich ist um so mehr (wenn $q > p$ ist) der ganze Flächeninhalt HDd größer als ADd, und das Verhältnis von HDd zu ADd ist größer als das von $DdfF$ zu $DdcC$.

7. Wenn $q > p$, ist

$$\left(1-\frac{n^2r^2}{pq}\right)^{\frac{n}{2}} > \left(1-\frac{nr}{p}\right)^p\cdot\left(1+\frac{nr}{q}\right)^q$$

und

$$\left(1-\frac{n^2r^2}{pq}\right)^{\frac{n}{2}} < \left(1-\frac{nr}{q}\right)^q\cdot\left(1+\frac{nr}{p}\right)^p.$$

Denn die Derivierte des links stehenden Ausdruckes nach r ist

$$-\frac{n^3 r}{pq}\left(1-\frac{n^2 r^2}{pq}\right)^{\frac{n}{2}-1},$$

und die Derivierte der rechten Seite in der ersten Ungleichung wird (weil $p+q=n$)

$$-\frac{n^3 r}{pq}\left(1-\frac{nr}{p}\right)^{p-1}\left(1+\frac{nr}{q}\right)^{q-1}.$$

Somit ergibt sich, daß sich

$$\left(1-\frac{n^2 r^2}{pq}\right)^{\frac{n}{2}} \text{ zu } \left(1-\frac{nr}{p}\right)^p\cdot\left(1+\frac{nr}{q}\right)^q$$

verhält wie die Derivierte des ersten Ausdruckes multipliziert mit $\left(1-\frac{n^2 r^2}{pq}\right)$ zu der Derivierten des letzteren Ausdruckes multipliziert mit

$$\left(1-\frac{nr}{p}\right)\left(1+\frac{nr}{q}\right)=1-\frac{nr}{p}+\frac{nr}{q}-\frac{n^2 r^2}{pq}.$$

Aus dieser Proportion geht hervor, da $q>p$ [und somit

$$\left(1-\frac{nr}{p}\right)\left(1+\frac{nr}{q}\right)<1-\frac{n^2 r^2}{pq}],$$

daß der Ausdruck

$$\left(1-\frac{nr}{p}\right)^p\left(1+\frac{nr}{q}\right)^q$$

im Verhältnis zu seiner Größe sich in stärkerem Maße verändert als

$$\left(1-\frac{n^2 r^2}{pq}\right)^{\frac{n}{2}}.$$

Und da ihre oben ermittelten Derivierten negatives Vorzeichen haben, nehmen sie beide mit wachsendem r ab, folglich muß von ihnen, falls sie für einen Wert von r gleich sind, wenn r über diesen Wert hinaus wächst, der letztere Ausdruck der größere sein. Sie sind aber beide gleich 1, wenn $r=0$ ist.

Auf gleiche Weise kann die zweite Ungleichung bewiesen werden. Hiernach ist, da $a = \frac{p}{n}$, $b = \frac{q}{n}$ gesetzt war, klar, daß die Ungleichung besteht

$$(a - r)^p (b + r)^q < a^p b^q \left(1 - \frac{n^2 r^2}{pq}\right)^{\frac{n}{2}} < (a + r)^p (b - r)^q,$$

wenn $q > p$ ist.

8. Wir setzen nun voraus, es werde die Kurve RQW, welche die Verlängerung der Strecken Dd, Ff, df in R, Q, W trifft, so konstruiert, daß Ff, das sich zu Cc verhält wie $(a + r)^p (b - r)^q$ zu $(a - r)^p (b + r)^q$ (s. Art. 3), sich zu Qf verhält wie

$$(a + r)^p \cdot (b - r)^q \text{ zu } a^p b^q \cdot \left(1 - \frac{n^2 r^2}{pq}\right)^{\frac{n}{2}},$$

wie immer auch die Punkte f und c in gleichen Entfernungen links oder rechts von d angenommen werden mögen. Dann ist nach dem vorigen Art. offenbar, daß immer

$$Cc < Qf < Ff$$

ist. Und folglich muß auch das gleiche von den Flächen gelten, welche die Ordinaten bei ihrer Bewegung durchstreichen, wenn ihre gleichen Abszissen zunehmen. Deshalb wird

$$DdcC < RdfQ < DdfF.$$

9. Da

$$Ff : Qf = (a + r)^p (b - r)^q : a^p b^q \left(1 - \frac{n^2 r^2}{pq}\right)^{\frac{n}{2}}$$

und nach Art. 3

$$(a + r)^p (b - r)^q = Ff : AH$$

ist, muß

$$Qf : AH = a^p b^q \left(1 - \frac{n^2 r^2}{pq}\right)^{\frac{n}{2}}$$

sein, wenn wie überall durch r das Verhältnis $df : AH$ bezeichnet wird. Wenn man nun das Kurvenstück $RdfQ$ quadriert [auf Grund der Formel

$$\left(1 - \frac{n^2 r^2}{pq}\right)^{\frac{n}{2}}$$

$$= 1 - \frac{n^3 r^2}{2pq} + \frac{n-2}{4} \cdot \frac{n^5 r^4}{2p^2 q^2} - \frac{n-2}{4} \cdot \frac{n-4}{6} \cdot \frac{n^7 r^6}{2p^3 q^3} + \cdots],$$

so ergibt sich für das Verhältnis von $RdfQ$ zu HO der Ausdruck

$$a^p b^q \left[r - \frac{n^3 r^3}{2 \cdot 3pq} + \frac{n-2}{4} \cdot \frac{n^5 r^5}{2 \cdot 5p^2 q^2} - \frac{n-2}{4} \cdot \frac{n-4}{6} \cdot \frac{n^7 r^7}{2 \cdot 7p^3 q^3} + \cdots \right].$$

Wenn man hierin

$$m^2 = \frac{n^3}{2pq}$$

einsetzt, so findet man

$$a^p b^q \cdot \frac{\sqrt{2pq}}{n\sqrt{n}} \cdot \left[mr - \frac{m^3 r^3}{3} + \frac{n-2}{2n} \cdot \frac{m^5 r^5}{5} - \frac{n-2}{2n} \cdot \frac{n-4}{3n} \cdot \frac{m^7 r^7}{7} + \cdots \right].$$

Die Reihe in der Klammer wird, wenn $m^2 r^2 = \frac{n}{2}$ oder $\frac{n^2 r^2}{pq} = 1$ und mithin die Ordinate Qf verschwindet, für $B^2 = \frac{n}{2}$

$$B - \frac{B^3}{3} + \frac{B^2 - 1}{2B^2} \cdot \frac{B^5}{5} - \frac{B^2 - 1}{2B^2} \cdot \frac{B^2 - 2}{3B^2} \cdot \frac{B^7}{7} + \cdots$$

10. Nach dieser letzten Bemerkung wird für $B^2 = \frac{n}{2}$ das Verhältnis der ganzen Fläche $RQWd$ zu HO

$$= \frac{\sqrt{2pq}}{n\sqrt{n}} a^p b^q \left[B - \frac{B^3}{3} + \frac{B^2 - 1}{2B^2} \cdot \frac{B^5}{5} - \cdots \right].$$

Nun ist aber (nach Lehrsatz 10, Art. 4) das Verhältnis

$$ACFH \text{ zu } HO = \frac{1}{n+1} \cdot \frac{1}{E},$$

indem E den Koeffizienten des Gliedes mit $a^p b^q$ in der Entwicklung von $(a+b)^n$ bezeichnet. Deshalb ist das Verhältnis

$$RQWd : ACFH = \frac{n+1}{n} \cdot \frac{\sqrt{2pq}}{\sqrt{n}} \cdot E a^p b^q \cdot \left[B - \frac{B^3}{3} + \cdots \right].$$

Wir setzen nun G für den Koeffizienten des mittleren Gliedes in der Entwicklung des angegebenen Binomials, so daß, wenn $p = q = \frac{n}{2}$, $E = G$ wird. Ferner wird dann $a = b = \frac{1}{2}$ und die Fläche $RQWd = \frac{1}{2} ACFH$, denn dann sind Qf, Ff, Cc alle einander gleich und folglich auch die Flächen

RQWd, *HDd* und *ADd*. [Setzt man diese Werte in die vorige Gleichung ein], so ergibt sich

$$B - \frac{B^3}{3} + \cdots = \frac{\sqrt{2n}}{n+1} \cdot \frac{2^{n-1}}{G}.$$

Aber diese Reihe ändert sich $\left(\text{weil } B^2 = \frac{n}{2}\right)$ nicht, welche Werte man auch dem p und q gibt, solange deren Summe n dieselbe bleibt. Folglich ist in allen Fällen das Verhältnis

$$RQWd : ACFH = \frac{\sqrt{pq}}{n} \cdot \frac{Ea^p b^q}{G} \cdot 2^n.$$

11. Nach Lehrsatz 10, Art. 4 ist

$$ACFH : HO = \frac{1}{n+1} \cdot \frac{1}{E}$$

und nach dem vorstehenden Art. 9

$$RdfQ : HO = a^p b^q \cdot \frac{\sqrt{2pq}}{n\sqrt{n}} \cdot \left[mr - \frac{m^3 r^3}{3} + \frac{n-2}{2n} \cdot \frac{m^5 r^5}{5} \cdots\right].$$

Demnach wird

$$RdfQ : ACFH = \frac{n+1}{n} \cdot \frac{\sqrt{2pq}}{\sqrt{n}} \cdot Ea^p b^q \cdot \left[mr - \frac{mr^3}{3} + \cdots\right].$$

Weiter ist nach Art. 10 das Verhältnis

$$RQWd : ACFH = \frac{\sqrt{pq}}{n} \cdot \frac{Ea^p b^q}{G} \cdot 2^n.$$

Somit wird das Verhältnis

$$RdfQ : RQWd = \frac{n+1}{\sqrt{n}} \cdot \frac{G}{2^{n-\frac{1}{2}}} \cdot \left[mr - \frac{mr^3}{3} + \cdots\right].$$

12. Nach Art. 2 ist, wenn $q > p$, das Verhältnis

$$(HDd - ADd) : HO < \frac{2a^p b^q}{n}.$$

Nach Lehrsatz 10, Art. 4 ist ferner das Verhältnis $ACFH : HO$ oder

$$(HDd + ADd) : HO = \frac{1}{n+1} \cdot \frac{1}{E}.$$

Demnach ist die Summe dieser beiden Verhältnisse, d. h. das Verhältnis

$$2\,HDd : HO < \frac{1}{n+1} \cdot \frac{1}{E} + \frac{2\,a^p b^q}{n},$$

und ihre Differenz, d. h. das Verhältnis

$$2\,ADd : HO > \frac{1}{n+1} \cdot \frac{1}{E} - \frac{2\,a^p b^q}{n}.$$

Somit wird weiter das Verhältnis $2\,HDd : 2\,ADd$ oder

$$HDd : ADd < \left(\frac{1}{n+1}\,\frac{1}{E} + \frac{2\,a^p b^q}{n}\right) : \left(\frac{1}{n+1}\,\frac{1}{E} - \frac{2\,a^p b^q}{n}\right)$$

oder, was dasselbe heißt,

$$< \left(1 + 2\,\frac{n+1}{n}\,Ea^p b^q\right) : \left(1 - 2\,\frac{n+1}{n}\,Ea^p b^q\right).$$

Aber das Verhältnis von HDd zu ADd ist nach Art. 6 größer als das Verhältnis von $DdfF$ zu $DdcC$, wenn $q > p$ ist. Deswegen wird um so mehr (wenn $q > p$) das Verhältnis

$$DdfF : DdcC < \left(1 + 2\,\frac{n+1}{n}\,Ea^p b^q\right) : \left(1 - 2\,\frac{n+1}{n}\,Ea^p b^q\right).$$

Und weil nach Art. 8 $RdfQ$ ein Mittelwert zwischen $DdfF$ und $DdcC$ ist, wird auch

$$DdfF : RdfQ < \left(1 + 2\,\frac{n+1}{n}\,Ea^p b^q\right) : \left(1 - 2\,\frac{n+1}{n}\,Ea^p b^q\right)$$

sein, anderseits aber

$$DdcC : RdfQ > \left(1 - 2\,\frac{n+1}{n}\,Ea^p b^q\right) : \left(1 + 2\,\frac{n+1}{n}\,Ea^p b^q\right).$$

So ergibt sich die folgende

Regel II.

Wenn von einem Ereignisse nichts bekannt ist, als daß es bei $p+q$ oder n Versuchen p mal eingetreten und q mal ausgeblieben ist, und ich hiernach vermute, daß die Wahrscheinlichkeit seines Eintretens bei einem einzelnen Versuch zwischen

$$\frac{p}{n} \quad \textit{und} \quad \frac{p}{n} + r$$

liegt, so ergibt sich, daß, wenn

$$m^2 = \frac{n^3}{2pq}, \quad a = \frac{p}{n}, \quad b = \frac{q}{n}$$

gesetzt wird, E den Koeffizienten des Gliedes mit $a^p b^q$ *in der Entwicklung von* $(a+b)^n$ *bezeichnet und*

$$\Sigma = \frac{n+1}{n} \cdot \frac{\sqrt{2pq}}{\sqrt{n}} \cdot E a^p b^q \cdot \left[mr - \frac{m^3 r^3}{3} + \frac{n-2}{2n} \cdot \frac{m^5 r^5}{5} - \frac{n-2}{2n} \cdot \frac{n-4}{3n} \cdot \frac{m^7 r^7}{7} + \cdots \right]$$

genommen wird, meine Chance, recht zu haben, größer ist als Σ *und kleiner als*

$$\Sigma \cdot \frac{1 + 2\frac{n+1}{n} E a^p b^q}{1 - 2\frac{n+1}{n} E a^p b^q}.$$

Denn nach Art. 11. ist, wenn wir den hier angeschriebenen Wert von Σ in Rechnung ziehen, das Verhältnis

$$RdfQ : ACFH = \Sigma.$$

Aber nach Art. 8. ist

$$DdfF > RdfQ$$

und nach Art. 12.

$$DdfF : RdfQ < \left(1 + 2\frac{n+1}{n} E a^p b^q\right) : \left(1 - 2\frac{n+1}{n} E a^p b^q\right).$$

Hiernach ist klar, daß das Verhältnis

$$DdfF : ACFH > \Sigma \text{ und } < \Sigma \cdot \frac{1 + 2\frac{n+1}{n} E a^p b^q}{1 - 2\frac{n+1}{n} E a^p b^q}$$

ist. Aber wie aus Lehrsatz 10 in dem vorhergehenden Aufsatze hervorgeht, ist die Chance, daß die Wahrscheinlichkeit des Ereignisses zwischen $\frac{p}{n}$ und $\frac{p}{n} + r$ liegt (d. h. zwischen dem Verhältnisse von $Ad : AH$ und dem von $Af : AH$), das Verhältnis

$$DdfF : ACFH.$$

Demnach ist die Chance, daß ich recht habe,

$$> \Sigma \text{ und } < \Sigma \cdot \frac{1 + 2\frac{n+1}{n} E a^p b^q}{1 - 2\frac{n+1}{n} E a^p b^q}.$$

Auf gleiche Weise findet sich zweitens unter denselben Voraussetzungen, wenn ich urteile, daß die Wahrscheinlichkeit zwischen $\frac{p}{n}$ und $\frac{p}{n} - r$ liegt, die Chance, daß ich recht habe,

$$< \Sigma \text{ und } > \Sigma \cdot \frac{1 - 2\frac{n+1}{n} E a^p b^q}{1 + 2\frac{n+1}{n} E a^p b^q}.$$

Dies ist ebenso wie der vorige Fall einleuchtend, weil

$$DdeC < RdfQ$$

ist, aber das Verhältnis zwischen diesen Flächen

$$> \left(1 - 2\frac{n+1}{n} E a^p b^q\right) : \left(1 + 2\frac{n+1}{n} E a^p b^q\right).$$

gefunden wurde.

Wenn drittens unter im übrigen gleichen Voraussetzungen $p > q$ ist, und ich urteile, daß die Wahrscheinlichkeit des Ereignisses zwischen $\frac{p}{n}$ und $\frac{p}{n} + r$ liegt, so ist die Chance, daß ich recht habe,

$$< \Sigma \text{ und } > \Sigma \cdot \frac{1 - 2\frac{n+1}{n} E a^p b^q}{1 + 2\frac{n+1}{n} E a^p b^q}.$$

Wenn ich dagegen urteile, daß die Wahrscheinlichkeit zwischen $\frac{p}{n}$ und $\frac{p}{n} - r$ liegt, so ist meine Chance

$$> \Sigma \text{ und } < \Sigma \cdot \frac{1 + 2\frac{n+1}{n} E a^p b^q}{1 - 2\frac{n+1}{n} E a^p b^q}.$$

Wenn $p = q$, ist meine Chance, auf welche von den beiden Arten ich urteile, immer genau $= \Sigma$. Diese Zusätze können auf dieselbe Weise bewiesen werden wie die vorhergehenden Fälle, wo $q > p$ ist, oder sie können auch aus dem vorher Bewiesenen gefolgert werden, indem man das Eintreten eines Ereignisses als dasselbe ansieht wie das Ausbleiben seines Gegenteils und umgekehrt.

Viertens, wenn ich unter übrigens gleichen Voraussetzungen, mag nun $q >$ oder $< p$ sein, urteile, daß die Wahrscheinlichkeit des Ereignisses zwischen

$$\frac{p}{n} + r \quad \text{und} \quad \frac{p}{n} - r$$

liegt, so ist meine Chance

$$> \frac{2\Sigma}{1 + 2\frac{n+1}{n} E a^p b^q} \quad \text{und} \quad < \frac{2\Sigma}{1 - 2\frac{n+1}{n} E a^p b^q}.$$

Dies ist eine sofort einleuchtende Folgerung aus den schon erledigten Fällen. Hier ist wieder, wenn $p = q$, meine Chance genau $= 2\Sigma$.

[Die abgeleitete Regel II. bedarf noch einer weiteren Umformung, denn ihre Anwendung kann, wenn n eine große Zahl ist, erhebliche Schwierigkeiten bieten, da dann in ihr Produkte mit sehr vielen Faktoren vorkommen. Es wird deshalb im folgenden zunächst versucht, für den Faktor der Reihe in dem Ausdruck von Σ brauchbare Näherungswerte, die bei sehr großem n gelten, abzuleiten.]

Drittes Stück.

(Philosophical Transactions, Vol. 53, p. 401—403.)

[1. Der Koeffizient E des Gliedes mit $a^p b^q$ in der Entwicklung von $(a+b)^n$ ist sehr umständlich zu berechnen, wenn n eine große Zahl ist. In diesem Falle läßt sich aber von der Formel Gebrauch machen, die *Stirling* für die Fakultät großer Zahlen gegeben hat, und welche (unter der Voraussetzung, daß n eine große Zahl ist) folgendermaßen lautet:

$$1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots n = \sqrt{2\pi} \cdot n^{n+\frac{1}{2}} \cdot e^{-n+\frac{1}{12}\frac{1}{n}-\frac{1}{360}\frac{1}{n^3}+\frac{1}{1260}\frac{1}{n^5}\cdots},$$

wobei π das Verhältnis des Kreisumfanges zum Kreisdurchmesser und e die Basis der natürlichen Logarithmen bezeichnet.

Nun ist

$$E = \frac{1 \cdot 2 \cdots\cdot n}{1 \cdot 2 \cdots p \cdot 1 \cdot 2 \cdots q},$$

also wird, wenn n und ebenso p und q sehr große Zahlen sind, mit großer Annäherung

$$E = \frac{\sqrt{2\pi n}^{\,n+\frac{1}{2}}}{\sqrt{2\pi p}^{\,p+\frac{1}{2}} \cdot \sqrt{2\pi q}^{\,q+\frac{1}{2}}} \cdot \frac{e^{-n+\frac{1}{12}\frac{1}{n}-\frac{1}{360}\frac{1}{n^3}\cdots}}{e^{-p+\frac{1}{12}\frac{1}{p}\cdots}\; e^{-q+\frac{1}{12}\frac{1}{q}\cdots}}.$$

Dieser Ausdruck aber reduziert sich, da

$$p + q = n \quad \text{und} \quad a = \frac{p}{n}, \quad b = \frac{q}{n}$$

ist, auf

$$E = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot \frac{1}{a^p b^q} \frac{\sqrt{n}}{\sqrt{pq}}\, e^S,]$$

wenn S die Reihe bezeichnet

$$S = \frac{1}{12}\left(\frac{1}{n} - \frac{1}{p} - \frac{1}{q}\right) - \frac{1}{360}\left(\frac{1}{n^3} - \frac{1}{p^3} - \frac{1}{q^3}\right) + \frac{1}{1260}\left(\frac{1}{n^5} - \frac{1}{p^5} - \frac{1}{q^5}\right)\cdots$$

[Von dieser Reihe sind nur wenige Glieder zu nehmen, um eine genügende Genauigkeit zu erreichen. Aus dem angeschriebenen Werte von E] folgt:

$$Ea^p b^q = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \cdot \frac{\sqrt{n}}{\sqrt{2pq}} \cdot e^S.$$

2. Die Reihe die in dem für Σ gegebenen Ausdrucke vorkommt, ist der direkten Ausrechnung zugänglich, wenn

$$mr < 1$$

ist. Nimmt aber mr einen größeren Wert an, so ist ein anderes Verfahren einzuschlagen, den Wert der Reihe zu finden. Es ergeben sich dann zwei voneinander sehr wenig verschiedene Werte, zwischen denen der wirkliche Wert der Reihe liegt. Zu diesen Werten gelangt man auf folgende Weise. Wir bezeichnen den Wert der Reihe mit R, nehmen [also

$$R = mr - \frac{m^3 r^3}{3} + \frac{n-2}{2n} \cdot \frac{m^5 r^5}{5} - \frac{(n-2)(n-4)}{2n \cdot 3n} \cdot \frac{m^7 r^7}{7} \cdots$$

oder für $u = mr$

$$R = u - \frac{u^3}{3} + \frac{n-2}{2n} \frac{u^5}{5} \cdots,$$

dann wird

$$\Sigma = \frac{n+1}{n} \cdot \frac{\sqrt{2pq}}{\sqrt{n}} \cdot Ea^p b^q \cdot R,$$

oder wenn wir den gefundenen Wert für $Ea^p b^q$ einsetzen,

$$\Sigma = \frac{n+1}{n} \cdot \frac{R}{\sqrt{\pi}} \cdot e^S.$$

3. Wir nehmen nun insbesondere $p = q = \frac{n}{2}$ an, dann ergibt sich, daß, wenn ich urteile, die Wahrscheinlichkeit des Ereignisses liege zwischen

$\frac{p}{n} + r$ und $\frac{p}{n} - r$, d. h. zwischen $\frac{1}{2} + r$ und $\frac{1}{2} - r$,

die Chance, daß ich recht habe, genau $= 2\Sigma$ ist, wie wir in den Zusätzen zu Regel II gesehen haben. Wir finden jetzt aber für den entgegengesetzten Wert der Reihe S]

$$\frac{2^2-1}{2n} - \frac{2^4-1}{360n^3} + \frac{2^6-1}{1260n^5} - \cdots$$

und wollen die Zahl, deren natürlicher Logarithmus diesen Wert hat, mit H bezeichnen. [So wird der obige Ausdruck für Σ

$$\Sigma = \frac{n+1}{n} \cdot \frac{R}{\sqrt{\pi}} \cdot \frac{1}{H}.$$

4. Es muß aber die Chance, daß ich mit meiner Vermutung recht habe, eine Verhältnis sein, daß höchstens das Verhältnis der Gleichheit sein kann und sonst kleiner ist. Die Chance ist aber 2Σ, und somit findet sich

$$2\Sigma \leqq 1$$

oder

$$2\frac{n+1}{n} \cdot \frac{R}{\sqrt{\pi}} \cdot \frac{1}{H} \leqq 1,$$

woraus folgt

$$R \leqq \frac{\sqrt{\pi}}{2} \cdot \frac{n}{n+1} \cdot H.$$

Das Gleichheitszeichen tritt ein, wenn ich vermute, daß die Wahrscheinlichkeit zwischen 0 und 1 liegt, denn dann verwandelt sich die Vermutung in Gewißheit, die Chance ist also durch das Verhältnis der Gleichheit gegeben. So ergibt sich, daß

$$R = \frac{\sqrt{\pi}}{2} \cdot \frac{n}{n+1} \cdot H$$

wird, wenn

$$r = \tfrac{1}{2}$$

genommen wird. Es ist aber hier

$$m \text{ oder } \sqrt{\frac{n^3}{2pq}} = \sqrt{2n},$$

und somit wird in diesem Falle der Wert des Argumentes

$$u = mr = \sqrt{\frac{n}{2}}.$$

5. Die Reihe R muß der Beziehung genügen

$$R > \frac{\sqrt{\pi}}{2} \cdot \frac{nH}{n+1} - \frac{n}{n+2} \frac{\left(1-\frac{2u^2}{n}\right)^{\frac{n}{2}+1}}{2u}.$$

Um diese Behauptung zu beweisen, bilden wir die Derivierte des in der Ungleichung auf der rechten Seite stehenden Ausdruckes. Dieselbe wird

$$\left(1-\frac{2u^2}{n}\right)^{\frac{n}{2}} + \frac{n}{n+2} \frac{\left(1-2\frac{u^2}{n}\right)^{\frac{n}{2}+1}}{2u^2}.$$

Bilden wir nun die Derivierte der Reihe R nach dem für sie gegebenen Ausdrucke, so ergibt sich

$$1 - u^2 + \frac{n-2}{2n} u^4 - \frac{n-2}{2n} \cdot \frac{n-4}{4n} \cdot u^6 + \cdots$$

oder

$$\left(1-\frac{2u^2}{n}\right)^{\frac{n}{2}}.$$

Der zuerst gefundenen Ausdruck ist aber immer größer als dieser letztere, wenn

$$0 < u < \sqrt{\frac{n}{2}}$$

ist, und wir wollen nur solche Werte von u, die innerhalb dieser Grenzen liegen, in Betracht ziehen. Dann ist sonach die Derivierte des in der Ungleichung rechts stehenden Ausdruckes größer als die des links stehenden R. An der Grenze $u = \sqrt{\frac{n}{2}}$ aber werden die beiden Ausdrücke einander gleich, der rechts stehende erreicht also, wenn u bis $\sqrt{\frac{n}{2}}$ wächst, den gleichen Endwert wie die Reihe R, indem er immer stärker zunimmt als diese; er muß also, solange $u < \sqrt{\frac{n}{2}}$, fortgesetzt kleiner sein als die Reihe R.

6. Die Reihe muß weiter der Beziehung genügen

$$R < \frac{\sqrt{\pi}}{2} \cdot \frac{nH}{n+1} - \frac{n}{n+2} \frac{\left(1-\frac{2u^2}{n}\right)^{\frac{n}{2}+1}}{2u} + \frac{n^2\left(1-\frac{2u^2}{n}\right)^{\frac{n}{2}+2}}{(n+2)(n+4)\cdot 4u^3}.$$

Denn bilden wir die Derivierte des rechts stehenden Ausdruckes, so ergibt sich

$$\left(1-\frac{2u^2}{n}\right)^{\frac{n}{2}} - \frac{3n^2\left(1-\frac{2u^2}{n}\right)^{\frac{n}{2}+2}}{(n+2)(n+4)\cdot 4u^4}.$$

Dieser letztere Ausdruck ist aber unter den angegebenen Bedingungen immer kleiner als die Derivierte der Reihe R

$$\left(1-\frac{2u^2}{n}\right)^{\frac{n}{2}}.$$

Da nun für den äußersten Wert $u = \sqrt{\frac{n}{2}}$ R gleich dem rechtsstehenden Ausdrucke wird, dieser letztere also den gleichen Endwert wie R erreicht, indem er langsamer zunimmt, so muß er fortgesetzt größer als R sein, und die Ungleichung ist bewiesen.

7. Wenn wir auf dieselbe Weise fortfahren, erkennen wir folgendes:] Bilden wir die Reihe

$$\frac{\sqrt{\pi}}{2} \cdot \frac{nH}{n+1} - \frac{n}{n+2} \frac{\left(1-\frac{2u^2}{n}\right)^{\frac{n}{2}+1}}{2u}$$

$$+ \frac{n^2\left(1-\frac{2u^2}{n}\right)^{\frac{n}{2}+2}}{(n+2)(n+4)\cdot 4u^3} - \frac{3n^3\left(1-\frac{2u^2}{n}\right)^{\frac{n}{2}+3}}{(n+2)(n+4)(n+6)\cdot 8u^5} \cdots,$$

so erhalten wir einen Näherungswert für die Reihe R, indem wir die vorstehende Reihe bis zu einem bestimmten Gliede auswerten. Jenachdem dies letzte Glied das Vorzeichen + oder — hat, ist der gefundene Näherungswert größer oder kleiner als der wahre Wert der Reihe R.

8. Wenn wir die so ermittelten Näherungswerte für R in den Ausdruck für 2Σ einsetzen, für $Ea^p b^q$ den in Art. 1. gefundenen Wert einführen und noch

$$e^S = h$$

machen, so [finden wir, indem wir uns auf die beiden ersten Glieder der die Näherungswerte liefernden Reihe beschränken,

$$\frac{2\Sigma}{1+2\frac{n+2}{n}Ea^p b^q} > \frac{\sqrt{2\pi pq}\cdot h}{\sqrt{2\pi pq}+h\left(n^{\frac{1}{2}}+n^{-\frac{1}{2}}\right)}$$

$$\cdot\left[H-\frac{1}{\sqrt{\pi}}\cdot\frac{n+1}{n+2}\cdot\frac{1}{mr}\cdot\left(1-\frac{2m^2r^2}{n}\right)^{\frac{n}{2}+1}\right],$$

und indem wir die ersten drei Glieder nehmen,

$$\frac{2\Sigma}{1-2\frac{n+1}{n}Ea^p b^q} < \frac{\sqrt{2\pi pq}\cdot h}{\sqrt{2\pi pq}-h\left(n^{\frac{1}{2}}+n^{-\frac{1}{2}}\right)}$$

$$\cdot\left[H-\frac{1}{\sqrt{\pi}}\cdot\frac{n+1}{n+2}\cdot\frac{1}{mr}\left(1-\frac{2m^2r^2}{n}\right)^{\frac{n}{2}+1}\right.$$

$$\left.+\frac{1}{\sqrt{\pi}}\cdot\frac{n}{n+2}\cdot\frac{n+1}{n+4}\cdot\frac{1}{2m^3r^3}\left(1-\frac{2m^2r^2}{n}\right)^{\frac{n}{2}+2}\right].$$

So] erhalten wir als Umformung der Regel II die folgende

Regel III.

Wenn von einem Ereignisse nichts bekannt ist, als daß es bei $p+q$ oder n Versuchen p mal eingetreten und q mal ausgeblieben ist, und ich hiernach schließe, daß die Wahrscheinlichkeit seines Eintretens bei einem einzelnen Versuche zwischen

$$\frac{p}{n}+r \quad \textit{und} \quad \frac{p}{n}-r$$

liegt, so ist meine Chance, recht zu haben,

$$>\frac{\sqrt{2\pi pq}\cdot h}{\sqrt{2\pi pq}+h\left(n^{\frac{1}{2}}+n^{-\frac{1}{2}}\right)}\cdot\left[H-\frac{1}{\sqrt{\pi}}\cdot\frac{n+1}{n+2}\cdot\frac{1}{mr}\left(1-\frac{2m^2r^2}{n}\right)^{\frac{n}{2}+1}\right]$$

und

$$< \frac{\sqrt{2\pi pq}\cdot h}{\sqrt{2\pi pq} - h\left(n^{\frac{1}{2}} + n^{-\frac{1}{2}}\right)} \cdot \left[H - \frac{1}{\sqrt{\pi}} \cdot \frac{n+1}{n+2} \cdot \frac{1}{mr}\left(1 - \frac{2m^2r^2}{n}\right)^{\frac{n}{2}+1} \right.$$

$$\left. + \frac{1}{\sqrt{\pi}} \cdot \frac{n}{n+2} \cdot \frac{n+1}{n+4} \cdot \frac{1}{2m^3r^3}\left(1 - \frac{2m^2r^2}{n}\right)^{\frac{n}{2}+2} \right],$$

wo m, π, h und H für die bereits erklärten Größen stehen.

Anmerkungen.

Die Bedeutung der vorstehend mitgeteilten Abhandlung geht aus ihr selbst so klar hervor, daß es kaum nötig ist, sie ausführlich auseinander zu setzen.

Die Darstellung *Bayes'* zeigt eine überraschende Beherrschung der mathematischen Hilfsmittel, sie ist in dem strengen Stile der alten Mathematiker gehalten und von einer schönen, abgerundeten Ausführlichkeit, die jeden Kommentar entbehrlich macht.

Ihr Verfasser ist kein Berufsmathematiker gewesen. Er war Geistlicher und gehörte den Nonkonformisten an. Sein Vater, *Joshua Bayes*, war seit der Uniformitätsakte der erste Prediger der Dissenters, der eine öffentliche Stellung bekleidete. *Thomas Bayes* selbst war eine Zeitlang Assistent seines Vaters an der Kirche in Leather Lane zu London. Später lebte er, scheint es, zu Tunbridge-Wells in der Grafschaft Kent. Er muß als Mensch und Gelehrter wohl angesehen gewesen sein. Von 1741 bis zu seinem Tode im Jahre 1761 gehörte er der Royal Society an. Nach seinem Ableben betrauten seine Angehörigen *Price* mit der Durchsicht seiner hinterlassenen Papiere, in denen verschiedene Gegenstände behandelt waren, deren Veröffentlichung ihm aber seine Bescheidenheit verboten hatte. (Memoirs of the Life of the Rev. Richard Price. By *William Morgan*, 1815.) So ist eine der merkwürdigsten mathematischen Entdeckungen erhalten geblieben. In dem Maße, wie man später die Bedeutung dieses Satzes erkannte, hat man sie leider auch verkannt. Es hat sich im Laufe der Zeit eine Dornenhecke von Unklarheiten und Mißverständnissen darum gezogen. Aber an *Bayes* liegt die Schuld nicht, daß diese Mißverständnisse aufgekommen sind, sie sind wesentlich in *Laplaces* Darstellung (Mémoires présentés par divers savants, tome VI, 1774) begründet. Was *Bayes* sagt, ist deutlich und einwandsfrei, alle Angriffe, die das *Bayes*sche Theorem erfahren hat, passen

nicht auf die Form, in der es *Bayes* selbst aufstellt und begründet. Deswegen ist es ein Tribut der Gerechtigkeit, den wir ihm entrichten, wenn wir den Wortlaut seiner Arbeit wiederholen, und so mag man diese Neuausgabe der einzigen Schrift, die *Bayes*' Namen der Nachwelt überliefert hat, ansehen als ein kleines Denkmal für diesen Denker, der still und bescheiden seine eigenen Bahnen gewandelt ist.

1) *Zu S. 4* (Definition 5). Die hier gegebene Definition der Wahrscheinlichkeit kann befremdlich erscheinen, da sie den Begriff der sogenannten mathematischen Erwartung zugrunde legt. In dieser Weise hat aber schon *Huygens* (De ratiociniis in ludo aleae) die mathematische Wahrscheinlichkeit definiert. Wir sind gewohnt, umgekehrt die mathematische Erwartung e mit Hilfe der Wahrscheinlichkeit zu bestimmen, indem wir

$$e = v \cdot w$$

setzen, wenn v die Größe des mit der Wahrscheinlichkeit w erwarteten Gewinnes ist. *Bayes* dagegen definiert:

$$w = \frac{e}{v}.$$

Er garantiert sich so von vornherein einen unbeschränkt variablen Wahrscheinlichkeitswert, der bei der Zurückführung des Begriffes auf die Unterscheidung der gleich möglichen Fälle nicht unmittelbar gewonnen werden kann. Auch sonst erweist sich ihm gerade die gewählte Definitionsart von Nutzen.

Die Lehrsätze 1 und 6 sind die gewöhnlichen Sätze von der Addition und Multiplikation der Wahrscheinlichkeiten. Daß *Bayes* sie gibt, geschieht nur zur Abrundung der Darstellung. Es ist daraus nicht bei ihm auf eine mangelhafte Literaturkenntnis zu schließen. Im Gegenteil scheint seine Arbeit aus dem Studium von *Moivre*s Doctrine of Chances hervorgewachsen zu sein. Die neue Wendung aber, welche die Ideen bei *Bayes* nehmen, zeigt sich schon in Lehrsatz 3. Grundlegend für seine Betrachtungsweise ist die Scheidung der zusammenhängenden (subsequent) und unabhängigen (independent) Ereignisse. Vorher hatte das Interesse den letzteren gehört, auf die ersteren hat *Bayes* zuerst die Aufmerksamkeit hingelenkt.

2) *Zu S. 9* (Lehrsatz 5). Dieser einfache Lehrsatz, auf den der vorhergehende Lehrsatz 4 eine vorsichtige Vorbereitung ist, bedeutet den entscheidenden Schritt. Der mit der Chance eines Spielers gleichbedeutende Begriff der mathematischen

Wahrscheinlichkeit war zunächst immer auf zukünftige Ereignisse bezogen worden. Hier handelt es sich nun um die Wahrscheinlichkeit eines schon entschiedenen Ereignisses. *Bayes'* Überlegung beruht auf einem Gedanken, der sich im allereinfachsten Falle wie folgt klarlegen läßt: Sechs Spieler würfeln mit einem Würfel und setzen jeder auf eine Nummer. Dann haben sie alle gleichviel einzusetzen. Nun nehme man an, der Würfel sei schon gefallen, liege aber verdeckt auf dem Tisch. Ändern sich dann ihre Einsätze? Offenbar nicht. Die gleiche Schlußweise liegt auch hier vor. Das gewonnene Theorem wird der Formulierung, die es später erhalten hat, besser angepaßt, wenn das erste Ereignis, mit einem von *Bayes* selbst herrührenden Ausdruck, als eine Reihe von Umständen (circumstances) angesehen wird, die dem zweiten Ereignisse vorhergehen oder es begleiten. Es handelt sich dann um die folgenden drei Wahrscheinlichkeiten:

1. Wahrscheinlichkeit w, daß das Ereignis mit diesen begleitenden Umständen eintritt,
2. Wahrscheinlichkeit W, daß das Ereignis überhaupt eintritt,
3. Wahrscheinlichkeit p, daß, wenn das Ereignis eingetreten ist, auch die in Rede stehenden Umstände vorgelegen haben,

und *Bayes'* Theorem drückt sich in der Formel aus

$$p = \frac{w}{W}.$$

Die direkte Zurückführung dieser Formel auf die Definition der Wahrscheinlichkeit als Verhältnis der Anzahl der günstigen Fälle zur Anzahl der möglichen Fälle hat gut und gründlich *v. Kries* (Die Prinzipien der Wahrscheinlichkeitsrechnung, Freiburg 1886) behandelt.

3) *Zu S. 10.* Man halte die vorsichtige Formulierung *Bayes'*: »Infolge gewisser Umstände entsteht eine Wahrscheinlichkeit dafür, daß ein Ereignis eintritt«, zusammen mit der durch *Laplace* eingeführten Ausdrucksweise, nach der jene Umstände die »Ursache« dieses Ereignisses heißen. Man kann nicht umhin, hierin mit *Stumpf* (Sitzungsberichte der bayerischen Akademie, Phil. Klasse, 1892) »eine umständliche und ganz überflüssige Verkehrung des Sprachgebrauchs« zu sehen, die auch dann nicht an Berechtigung gewinnt, wenn man, wie z. B. *Bertrand* (Calcul des probabilités, Paris 1889) es tut,

eingesteht, das Wort Ursache (cause) werde hier in einem andern Sinne als gewöhnlich gebraucht. Dem Worte »Hypothese«, das *Stumpf* statt »Ursache« gebraucht wissen will, möchte ich aber den Ausdruck »Entstehungsmodus«, den *v. Kries* vorschlägt, noch vorziehen.

4) *Zu S. 12* (1. Annahme). Die hier gemachten Voraussetzungen sind fast vollkommen erfüllt, wenn eine genau nivellierte Platte auf freiem Felde bei einem Hagelschauer aufgestellt wird. Zu beachten ist aber, daß die zwei Dimensionen der Platte bei der *Bayes*schen Konstruktion keine Rolle spielen. Vielmehr denkt *Bayes* sich das Quadrat in Parallelstreifen zerlegt, und es handelt sich nur darum, auf welchen dieser Parallelstreifen die Kugel fällt.

Ist die Länge der Quadratseiten gleich 1, dx die Breite der Streifen, so wird die Wahrscheinlichkeit, daß die Kugel auf einen bestimmten der Streifen zu liegen kommt, einfach $= dx$. Man könnte nun, ohne daß an der Schlußfolgerung sich etwas Wesentliches ändert, auch annehmen, diese Wahrscheinlichkeit sei allgemeiner $= f(x)\,dx$, wo $f(x)$ irgend eine Funktion des Abstandes x, den der Streifen von einer Quadratseite hat, bezeichnet. In der Tat würde dies nur eine Transformation der Veränderlichen x in eine andere y bedeuten, die durch die Differentialgleichung

$$dy = f(x)\,dx$$

bestimmt wird. Da das über die ganze Quadratseite erstreckte Integral

$$\int dy = 1$$

sein muß (weil durch dies Integral die Wahrscheinlichkeit, daß die Kugel überhaupt auf die Platte fällt, gegeben wird), ergibt sich, wenn man noch $y = 0$ für $x = 0$ annimmt, daß durch die in Rede stehende Transformation das Quadrat in ein anderes gleich großes transformiert wird, auf das man nun alle folgenden Betrachtungen bezieht.

(2. Annahme.) Man kann fragen, was für einen Zweck überhaupt das einmalige Werfen der Kugel W hat. Es dient zunächst dazu, die Wahrscheinlichkeit des Ereignisses M festzulegen. Statt die Kugel W zu werfen, könnte man auch die benutzte Parallele os zu der Quadratseite nach Willkür ziehen. Was durch die gewählte Formulierung aber mehr ausgedrückt

wird, ist, daß das Ereignis, dessen Wahrscheinlichkeit empirisch ermittelt werden soll, erst durch ein anderes Ereignis bestimmt wird, das nur dann bekannt wird, wenn die Wahrscheinlichkeit des dadurch bestimmten Ereignisses ermittelt ist. Die Ermittelung dieser Wahrscheinlichkeit bedeutet also das Erschließen eines unbekannten Tatbestandes aus der Beobachtung von Ereignissen, die durch jenen bestimmt sind. Dabei wird vorausgesetzt, daß man in jedem einzelnen Falle entscheiden kann, ob das von dem unbekannten Tatbestande abhängige Ereignis eingetreten ist oder nicht. Der Sachverhalt wird klarer, wenn die *Bayes*sche Konstruktion durch das Beispiel einer Urne ersetzt wird, in der schwarze und weiße Kugeln gemischt enthalten sind. Das Mischungsverhältnis der schwarzen und weißen Kugeln bedeutet dann den unbekannten Tatbestand, das Ziehen einer schwarzen oder weißen Kugel das abhängige Ereignis, und hier ist sofort klar, daß sich entscheiden läßt, ob das abhängige Ereignis eingetreten ist oder nicht, ohne daß man den bestimmenden Tatbestand kennt. Die *Bayes*sche Konstruktion läßt sich aber leicht so abändern, daß sie denselben Vorteil bietet. Denkt man sich einen oben offenen, quadratischen Kasten, in den eine Schublade hineinpaßt, denkt man sich ferner die Schublade etwas herausgezogen, und nun lasse man die Kugeln von oben in den Kasten fallen und beobachte jedesmal, ob die Kugel in die Schublade fällt oder nicht, dann ist die Aufgabe: aus der relativen Häufigkeit der Fälle, in denen dies eintritt, zu erschließen, wie weit die Schublade herausgezogen war. So bewahrt man den großen Vorzug der unbeschränkten Variabilität, den die Wahrscheinlichkeitswerte in der *Bayes*schen Konstruktion darbieten. Es muß aber wohl beachtet werden, daß von dem bestimmenden Tatbestand nichts ermittelt wird als die Wahrscheinlichkeit, die es dem abhängigen Ereignisse erteilt. Was also gefunden wird, ist in jedem Falle nichts anderes als die Wahrscheinlichkeit des abhängigen Ereignisses, und bei dieser Bestimmung ist vorausgesetzt, daß ihm eine bestimmte, von Fall zu Fall nicht wechselnde Wahrscheinlichkeit zukommt. Wenn der bestimmende Tatbestand eine solche Wahrscheinlichkeit garantiert und von ihm nichts unbekannt ist als der Grad von Wahrscheinlichkeit, den er dem abhängigen Ereignis verleiht, so läßt sich aus den Beobachtungen dieses Ereignisses jede Wahrscheinlichkeit mit größerer oder geringerer Sicherheit, aber in keinem Falle mehr ermitteln.

5) *Zu S. 13.* Ich habe mich nicht für berechtigt gehalten, die umständliche Ausdrucksweise der alten Proportionenlehre, die hier angewendet wird, abzuändern, um der Beweisführung nicht ihr charakteristisches Gepräge zu nehmen. Inverse Komposition bedeutet, daß man aus der Formel

$$x : y = a : b$$

die Formel

$$x : (x + y) = a : (a + b)$$

ableitet.

6) *Zu S. 17.* Das Verhältnis der Fläche AiB zu AC, von dem *Bayes* hier spricht, läßt sich wie folgt bestimmen. Wird die Quadratseite $AB = 1$ genommen, so ist der Quadratinhalt

$$AC = 1.$$

Die Ordinate der Kurve für die Abszisse x hat den Wert

$$y = Ex^p (1 - x)^q$$

und hierbei ist

$$E = \frac{(p + q)!}{p!\, q!}.$$

Somit ergibt sich der gesuchte Flächeninhalt

$$AiB = \int_0^1 y\, dx = \frac{(p + q)!}{p!\, q!} \int_0^1 x^p (1 - x)^q\, dx.$$

Dies Integral wird unten ausgeführt, es findet sich

$$AiB = \frac{AiB}{AC} = \frac{(p + q)!}{p!\, q!} \cdot \frac{p!\, q!}{(p + q + 1)!}$$

$$= \frac{1}{p + q + 1} = \frac{1}{n + 1}.$$

Dies wird später (Art. 4, S. 22) benutzt.

7) *Zu S. 18.* Dieses Scholion ist für die richtige Auffassung des nun folgenden *Bayes*schen Theorems von großer Wichtigkeit. Die Angriffe und Mißdeutungen, denen das Theorem ausgesetzt gewesen ist, erklären sich zum großen Teil aus der Nichtbeachtung des hier Gesagten. *Bayes* hat durch seine Definition des unbekannten Ereignisses die Grenzen deutlich bezeichnet, innerhalb denen das Theorem gültig ist. Daß diese Grenzen enger sind als die Ausdehnung, die man in der Folgezeit dem Theorem zu geben suchte, ist nicht seine

Schuld. Um das eklatanteste Beispiel zu nennen, der Aufgang der Sonne ist gewiß kein unbekanntes Ereignis in *Bayes*' Sinne. Für *Bayes* ist es genug, an einem realisierbaren und charakteristischen Beispiele die Bedingungen des Lehrsatzes festgelegt zu haben. Wie weit sich derselbe auf Fälle des praktischen Lebens anwenden läßt, bleibt bei ihm eine offene Frage, so sehr ihn auch alles drängt, sie bejahend zu beantworten.

8) *Zu S. 19* (Lehrsatz 10). Die umständliche geometrische Formulierung dieses Lehrsatzes, der das *Bayes*sche Theorem darstellt, wird vermieden, wenn man die Bezeichnung der Integralrechnung anwendet. Setzt man $AH = 1$, also $z = 1 - x$ und, wie es später geschieht, $Ac = x$, $Af = X$, so gibt der Lehrsatz den folgenden Wert für die Chance w

$$w = \frac{\int_x^X x^p (1-x)^q \, dx}{\int_0^1 x^p (1-x)^q \, dx}.$$

In dieser Form wird das *Bayes*sche Theorem gewöhnlich gegeben. Um *Bayes*' Darstellung zu verstehen, muß man sich erinnern, daß in England die Integralbezeichnung verpönt war, weil ihr Urheber *Leibniz* als Plagiator *Newtons* galt. Deshalb hielt man an der unendlich umständlichen geometrischen Ausdrucksweise fest, und es ist bei dem einzelnen, so auch bei *Bayes*, kaum zu sagen, wie weit er die kontinentale Mathematik überhaupt gekannt hat.

9) *Zu S. 21.* Die in Art. 1 gegebene Formel bedeutet, daß das Integral

$$\int_0^x x^p (1-x)^q \, dx = \frac{x^{p+1}}{p+1} - q \frac{x^{p+2}}{p+2} + \frac{q(q-1)}{2} \frac{x^{p+3}}{p+3} \cdots$$

wird.

10) *Zu S. 22.* Die in Art. 2 abgeleitete Formel läßt sich auch auf folgende einfache Art gewinnen. Durch partielle Integration ergibt sich

$$\int^x x^p (1-x)^q \, dx = \frac{x^{p+1}(1-x)^q}{p+1} + \frac{q}{p+1} \int_0^x x^{p+1} (1-x)^{q-1} \, dx.$$

Weiter auf dieselbe Weise

$$\int_0^x x^{p+1}(1-x)^{q-1}\,dx$$

$$= \frac{x^{p+2}(1-x)^{q-1}}{p+2} + \frac{q-1}{p+2}\int_0^x x^{p+2}(1-x)^{q-2}\,dx.$$

Fährt man so fort, so erhält man:

$$\int_0^x x^p(1-x)^q\,dx = \frac{x^{p+1}(1-x)^q}{p+1} + \frac{q x^{p+2}(1-x)^{q-1}}{(p+1)(q+2)}$$

$$+ \frac{q(q-1)\cdot x^{p+3}(1-x)^{q-2}}{(p+1)(p+2)(p+3)} + \cdots$$

Dies aber ist die im Text gegebene Formel. Das letzte Glied der Reihenentwicklung lautet:

$$\frac{q(q-1)\cdots 3\cdot 2\cdot 1\cdot x^{p+q+1}}{(p+1)(p+2)\cdots(p+q)(p+q+1)}.$$

Dieses Glied bleibt allein übrig, wenn man die obere Grenze des Integrals $= 1$ nimmt, und so ergibt sich:

$$\int_0^1 x^p(1-x)^q\,dx = \frac{1\cdot 2\cdots(q-1)q}{(p+1)\cdot(p+2)\cdots(p+q+1)}.$$

Setzt man diesen Wert in die Formel für die Chance w, daß die Wahrscheinlichkeit des Ereignisses zwischen x und X liege, ein, so ergibt sich

$$w = \frac{(p+q+1)!}{p!\,q!}\int_x^X x^p(1-x)^q\,dx.$$

11) *Zu S. 24ff.* (Die *Bayes*sche Kurve). Wir wollen die Kurve, deren Gleichung lautet:

$$y = cx^p(1-x)^q,$$

wenn c eine beliebige Konstante, p, q ganze Zahlen bedeuten, einfach als *Bayes*sche Kurve bezeichnen und der Übersichtlichkeit wegen ihre Haupteigenschaften, die zum Teil auch von *Price* angegeben sind, hier zusammenstellen.

Die Kurve ist vom Typus der allgemeinen Parabeln und vom kurventheoretischen Standpunkte eine algebraische Kurve der Ordnung $p + q = n$ mit einem $(n - 1)$fachen Punkte, der nach der Richtung der y-Achse zu in unendlicher Entfernung gelegen ist.

Die Kurve berührt die x-Achse $p - 1$fach im Koordinatenursprung $(x = 0)$ und $q - 1$fach im Punkte $x = 1$. Für die gegenwärtige Untersuchung kommt nur das Kurvenstück in Betracht, das über der Strecke der x-Achse von $x = 0$ bis $x = 1$ liegt. Für diese Strecke ist y immer positiv.

Wir bilden nun

$$\frac{dy}{dx} = cx^p (1 - x)^q \left[\frac{p}{x} - \frac{q}{1 - x}\right]$$

und sehen sofort, daß die Kurve zwischen $x = 0$ und $x = 1$ ihren höchsten Punkt erreicht, wenn

$$\frac{p}{x} = \frac{q}{1 - x}$$

ist, also

$$x = \frac{p}{n}.$$

Setzen wir nun

$$\frac{d^2 y}{dx^2} = 0,$$

so ergibt sich auf einfache Weise die quadratische Gleichung für x

$$n(n - 1)x^2 - 2p(n - 1)x + p(p - 1) = 0,$$

indem wir die Werte $x = 0$ und $x = 1$ hier nicht berücksichtigen. Nennen wir die Wurzeln der quadratischen Gleichung x_1 und x_2, so wird

$$\frac{x_1 + x_2}{2} = \frac{p}{n}, \quad \frac{x_1 - x_2}{2} = \frac{1}{n} \sqrt{\frac{pq}{n - 1}}.$$

Also *besitzt das Kurvenstück zwischen* $x = 0$ *und* $x = 1$ *immer zwei Wendepunkte, die von der größten Ordinate nach*

beiden Seiten gleich weit entfernt sind, und zwar ist die Grösse dieses Abstandes

$$\frac{1}{n}\sqrt{\frac{pq}{n-1}}.$$

Verschieben wir das Koordinatenkreuz längs der x-Achse, bis die größte Ordinate der Kurve in die y-Achse fällt, und nennen r die neue Abszisse, so wird

$$x = a + r, \quad 1 - x = b - r,$$

wenn

$$a = \frac{p}{n}, \quad b = \frac{q}{n}, \quad \text{also} \quad a + b = 1$$

angenommen wird. Dann wird die Gleichung der Kurve

$$y = y_0\left(1 + \frac{r}{a}\right)^p\left(1 - \frac{r}{b}\right)^q,$$

indem $y_0 = c a^p b^q$ die Maximalordinate bezeichnet.

Bayes führt nun eine Mittelkurve ein, die durch die Gleichung gegeben ist:

$$y' = y_0\left(1 - \frac{r^2}{ab}\right)^{\frac{n}{2}}.$$

Diese Mittelkurve hat die charakteristischen Eigenschaften, daß sie 1. symmetrisch bez. ihrer Maximalordinate ist, und 2. ihre Wendepunkte in denselben Ordinaten liegen wie die der vorgelegten Kurve.

Bayes beweist dann, daß, wenn y und $y_{,}$ zwei Ordinaten der letzteren Kurve sind, die zu entgegengesetzt gleichen Werten von r gehören, und y' die Ordinate der Mittelkurve, die zu denselben Werten von r gehört,

für $p < q$: $\quad y_{,} < y' < y,$
für $p > q$: $\quad y_{,} > y' > y$

wird, indem y die zu positivem r gehörende Ordinate bedeutet.

Bilden wir die logarithmische Derivierte von der Ordinate y der *Bayes*schen Kurve, so ergibt sich

$$\frac{d \log y}{dr} = n\left[\frac{1}{1 + \frac{r}{a}} - \frac{1}{1 - \frac{r}{b}}\right].$$

Ist nun n sehr groß, r sehr klein, so wird angenähert

$$\frac{d \log y}{dr} = n\left[\left(1 - \frac{r}{a}\right) - \left(1 + \frac{r}{b}\right)\right]$$

$$= - nr \frac{a+b}{ab} = - \frac{nr}{ab},$$

und hieraus folgt, da für $r = 0$ $y = y_0$ wird, durch Integration

$$y = y_0 \cdot e^{-\frac{n}{2ab} r^2}.$$

Anderseits wird, wenn n sehr groß, die Ordinate der Mittelkurve

$$y' = y_0 \left(1 - \frac{2}{n} \cdot \frac{nr^2}{2ab}\right)^{\frac{n}{2}}$$

mit großer Annäherung

$$y' = y_0 \cdot e^{-\frac{n}{2ab} r^2}.$$

Also wird für sehr großes n

$$y = y',$$

die *Bayes*sche Kurve fällt mit der Mittelkurve zusammen.

12) *Zu S. 27 unten.* Gemeint ist die Reihenentwicklung

$$\frac{1}{2} \log \frac{1+x}{1-x} = x + \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} + \frac{x^7}{7} + \cdots$$

Diese folgt aus den Reihen

$$\log (1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \cdots$$

$$\log (1-x) = -x - \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} - \cdots$$

durch Subtraktion und war schon vor dem *Taylor*schen Lehrsatze, aus dem die letzten Reihen eine einfache Folge sind, in England bekannt. Die erste dieser beiden Reihen z. B. leitete man wohl durch gliedweise Integration aus der einfachen Reihe

$$\frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 - x^3 + x^4 - \cdots$$

her. — Man beachte, daß $r < a < b$ ist.

13) *Zu S. 31.* Die hier zum ersten Male eingeführte Größe

$$m = \sqrt{\frac{n^3}{2pq}}$$

hat später eine große Bedeutung gewonnen, weil sie ein Maß für die Genauigkeit der empirischen Wahrscheinlichkeitsbestimmung liefert. Setzt man ein

$$a = \frac{p}{n}, \quad b = \frac{q}{n} = 1 - a,$$

so wird

$$m = \sqrt{\frac{n}{2a(1-a)}},$$

und man sieht, daß die Genauigkeit wie die Quadratwurzel aus der Zahl der beobachteten Fälle steigt.

14) *Zu S. 34.* Was die in der Formel für Σ vorkommende Reihe betrifft, die, wenn wir $mr = u$ setzen, lautet:

$$R = u - \frac{u^3}{3} + \frac{n-2}{2n} \cdot \frac{u^5}{5} - \frac{n-2}{2n} \cdot \frac{n-4}{3n} \cdot \frac{u^7}{7} + \cdots$$

und, gerades n vorausgesetzt, im ganzen $\frac{n}{2} + 1$ Glieder umfaßt, so wird später im Text noch benutzt, daß

$$\frac{dR}{du} = \left(1 - \frac{2u^2}{n}\right)^{\frac{n}{2}}.$$

Weil ferner für $u = 0$ auch $R = 0$ wird, läßt sich schreiben:

$$R = \int_0^u \left(1 - \frac{2u^2}{n}\right)^{\frac{n}{2}} du.$$

15) *Zu S. 36.* Nach *Bayes'* Auffassung wird das Resultat, das aus der Beobachtung des Eintretens und Ausbleibens eines Ereignisses in einer Anzahl von Fällen für die Wahrscheinlichkeit dieses Ereignisses sich ergibt, vollständig repräsentiert durch die von ihm eingeführte Kurve, deren Ordinaten $y = \varphi(x)$ sind, wenn

$$\varphi(x) = \frac{(p+q+1)!}{p!\,q!} x^p (1-x)^q$$

gesetzt wird, woraus

$$\int_0^1 \varphi(x)\,dx = 1$$

folgt.

Der wahrscheinlichste Wert der Wahrscheinlichkeit ist der Wert der Abszisse, für den die zugehörige Ordinate ein Maximum wird, nämlich der Wert

$$x_w = \frac{p}{p+q}.$$

Statt des wahrscheinlichsten Wertes kann man, um einen abgekürzten Ausdruck des durch die Beobachtungen gelieferten Resultates zu haben, auch den mittleren Wert x_m wählen, der durch die Gleichung

$$x_m = \int_0^1 x\,\varphi(x)\,dx$$

definiert ist. Führt man das Integral aus, so ergibt sich

$$x_m = \frac{(p+q+1)!}{p!\,q!}\int_0^1 x^{p+1}(1-x)^q\,dx$$

$$= \frac{(p+q+1)!}{p!\,q!}\cdot\frac{(p+1)!\,q!}{(p+q+2)!}$$

oder

$$x_m = \frac{p+1}{p+q+2}.$$

Die Bedeutung dieses Ausdruckes kann nach *Bayes* keine andere als die soeben angegebene eines Mittelwertes sein. Dagegen kann nur von einer bestimmten Wahrscheinlichkeit des Ereignisses die Rede sein, die sich von Versuch zu Versuch (oder von Fall zu Fall) nicht ändert, mit Sicherheit aber aus den angestellten Beobachtungen allein nicht ermittelt werden kann.

Die weiter gehende Deutung des Wertes x_m als der Wahrscheinlichkeit, daß, nachdem das Ereignis p mal eingetreten und q mal ausgeblieben ist, es das nächste Mal wieder eintritt, liegt — man mag im übrigen über sie denken wie man will — außerhalb des *Bayes*schen Gedankenkreises.

16) *Zu S. 37.* Die benutzte Formel findet sich in *Stirlings* Methodus differentialis (London 1730) auf S. 135. Sie kann in der Form gegeben werden:

$$\log(n!) = \log\sqrt{2\pi} + \left(n + \frac{1}{2}\right)\log n - n + A_2\frac{1}{n} + A_4\frac{1\cdot 2}{n^3}$$
$$+ \cdots + A_{2k}\frac{(2k-2)!}{n^{2k-1}} + \varepsilon A_{2k+2}\frac{(2k)!}{n^{2k+1}}$$
$$(0 < \varepsilon < 1),$$

indem die Koeffizienten durch die Rekursionsformeln bestimmt werden:

$$A_2 = \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{3!},$$
$$A_4 = \frac{3}{2}\cdot\frac{1}{5!} - \frac{A_2}{3!},$$
$$A_6 = \frac{5}{2}\cdot\frac{1}{7!} - \frac{A_2}{5!} - \frac{A_4}{3!}$$

usw.

Was *Stirling* an dieser Reihe neu gefunden hat, ist aber nur das konstante Glied $\log\sqrt{2\pi}$, das er mit Hilfe der *Wallis*schen Formel bestimmt zu haben scheint. Abgesehen von der Form dieses konstanten Gliedes hatte schon *Moivre* die Reihe aufgestellt. Sein Ausgangspunkt war dabei der Zweck, zu dem auch hier die Formel benutzt wird: die Berechnung des größten Gliedes in der Entwicklung des Binomials $(a+b)^n$.

17) *Zu Seite 43.* Die *Bayes*sche Analyse gestattet die moderne Schreibweise des Ausdruckes, dem sich die Reihe R bei unbegrenzt wachsendem n nähert, sofort zu finden. Es ergibt sich (vgl. S. 55)

$$\frac{dR}{du} = \left(1 - \frac{2u^2}{n}\right)^{\frac{n}{2}}.$$

Bei unbegrenzt wachsendem n wird dies

$$\frac{dR}{du} = e^{-u^2},$$

und weil die Reihe R für $u = 0$ verschwindet, wird dann

$$R = \int_0^u e^{-u^2}\,du.$$

Hieraus findet man weiter auf sehr einfache Art den Ausdruck, dem sich der *Bayes*sche Wert 2Σ bei unbegrenzt wachsendem n nähert. Zunächst wird der Ausdruck S (S. 37), wenn n, p, q sehr große Zahlen sind, sehr klein und demnach angenähert

$$e^S = 1.$$

In dem Ausdruck für Σ kann nun weiter für sehr großes n $\frac{n+1}{n} = 1$ gesetzt werden, und dann erhält man

$$2\Sigma = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^u e^{-u^2}\, du.$$

Hierbei ist

$$u = \sqrt{\frac{n^3}{2pq}} \cdot r,$$

wenn

$$\frac{p}{n} + r \quad \text{und} \quad \frac{p}{n} - r$$

die Grenzen sind, zwischen denen die Wahrscheinlichkeit vermutet wird.

Wenn nun im 4. Zusatz zur 2. Regel (S. 36) der Näherungswert für das Maximalglied in der Binomialreihe eingesetzt wird:

$$E a^p b^q = \sqrt{\frac{n}{2\pi pq}},$$

wie er sich aus der Formel auf S. 38 oben für $e^S = 1$ ergibt, dann findet man für die von *Bayes* gegebenen Grenzen der Chance Γ mit großer Annäherung:

$$2\Sigma\left(1 - \sqrt{\frac{2n}{\pi pq}}\right) < \Gamma < 2\Sigma\left(1 + \sqrt{\frac{2n}{\pi pq}}\right).$$

Begnügt man sich mit dem mittleren Wert 2Σ, so läßt sich das *Bayes*sche Theorem in der Form aussprechen:

Wenn von einem Ereignisse nichts bekannt ist, als daß es in einer sehr großen Anzahl n von Fällen p mal eingetreten und q mal ausgeblieben ist, und ich hiernach schließe, daß die

Wahrscheinlichkeit seines Eintretens in einem einzelnen Falle zwischen den Grenzen

$$\frac{p}{n} + \sqrt{\frac{2pq}{n^3}} \cdot u \text{ und } \frac{p}{n} - \sqrt{\frac{2pq}{n^3}} \cdot u$$

liegt, so ist die Chance, daß ich recht habe,

$$\frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^u e^{-u^2} du.$$

Druck von Breitkopf & Härtel in Leipzig.

Nr. 83. **Jacob Steiner.** II. Theil. Herausgeg. von A. v. Oettingen. Mit 2 Tafeln und 2 Figuren im Text. (162 S.) ℳ 2.40.

» 90. **A. Bravais,** Abhandlung über die Systeme von regelmäßig auf einer Ebene oder im Raum vertheilten Punkten. (1848.) Übers. u. herausg. von C. u. E. Blasius. Mit 2 Tafeln. (142 S.) ℳ 2.—.

» 91. **G. Lejeune Dirichlet,** Untersuch. über verschiedene Anwendungen d. Infinitesimalanalysis auf d. Zahlentheorie. (1839—1840.) Deutsch herausgeg. von R. Haussner. (128 S.) ℳ 2.—.

» 93. **Leonhard Euler,** Drei Abhandlungen üb. Kartenprojection. (1777.) Mit 9 Textfig. Herausg. von A. Wangerin. (78 S.) ℳ 1.20.

» 99. **R. Clausius,** Über die bewegende Kraft d. Wärme. (1850.) Herausg. von Max Planck. Mit 4 Textfiguren. (55 S.) ℳ —.80.

» 101. **G. Kirchhoff,** Abhandlung über mechanische Wärmetheorie: 1. Ein Satz der mechan. Wärmetheorie u. Anwendung. (1858.) 2. Spannung d. Wasserdampfes bei Temperaturen, die dem Eispunkte nahe sind. (1858.) — 3. Spannungen d. Dampfes von Mischungen aus Wasser u. Schwefelsäure. Herausg. v. Max Planck. (48 S.) ℳ —.75.

» 102. **James Clerk Maxwell,** Über physikal. Kraftlinien. Herausgeg. von L. Boltzmann. Mit 12 Textfiguren. (147 S.) ℳ 2.40.

» 103. **Joseph Louis Lagrange's** Zusätze zu Eulers Elementen der Algebra. Unbestimmte Analysis. Aus dem Französischen übersetzt von A. v. Oettingen, herausgeg. von H. Weber. (171 S.) ℳ 2.60.

» 106. **D'Alembert,** Dynamik. (1743.) Übersetzt und herausgegeben von Arthur Korn. Mit 4 Tafeln. (210 S.) ℳ 3.60.

» 107. **Jakob Bernoulli,** Wahrscheinlichkeitsrechnung. (Ars conjectandi.) (1713.) I. u. II. Theil. Übersetzt und herausgeg. von R. Haussner. Mit 1 Textfigur. (162 S.) ℳ 2.50.

» 108. —— —— III. u. IV. Theil mit dem Anhange: Brief an einen Freund über das Ballspiel (Jeu de Paume). Übersetzt und herausgegeben von R. Haussner. Mit 3 Textfig. (172 S.) ℳ 2.70.

» 109. **Riccardo Felici,** Mathematische Theorie der electro-dynamischen Induction. Übersetzt von B. Dessau. Herausgeg. von E. Wiedemann. (121 S.) ℳ 1.80.

» 111. **N. H. Abel,** Abhandl. über eine besond. Klasse algebraisch. auflösb. Gleichungen. Herausg. von Alfred Loewy. (50 S.) ℳ —.90.

» 112. **Augustin-Louis Cauchy,** Abhandlung über bestimmte Integrale zwischen imaginären Grenzen. (1825.) Herausgeg. von P. Stäckel. (80 S.) ℳ 1.25.

» 113. **Lagrange** (1772) und **Cauchy** (1819), Zwei Abhandl. zur Theorie d. partiellen Differentialgleich. erster Ordnung. Aus d. Französ. übers. und herausgeg. von Gerhard Kowalewski. (54 S.) ℳ 1.—.

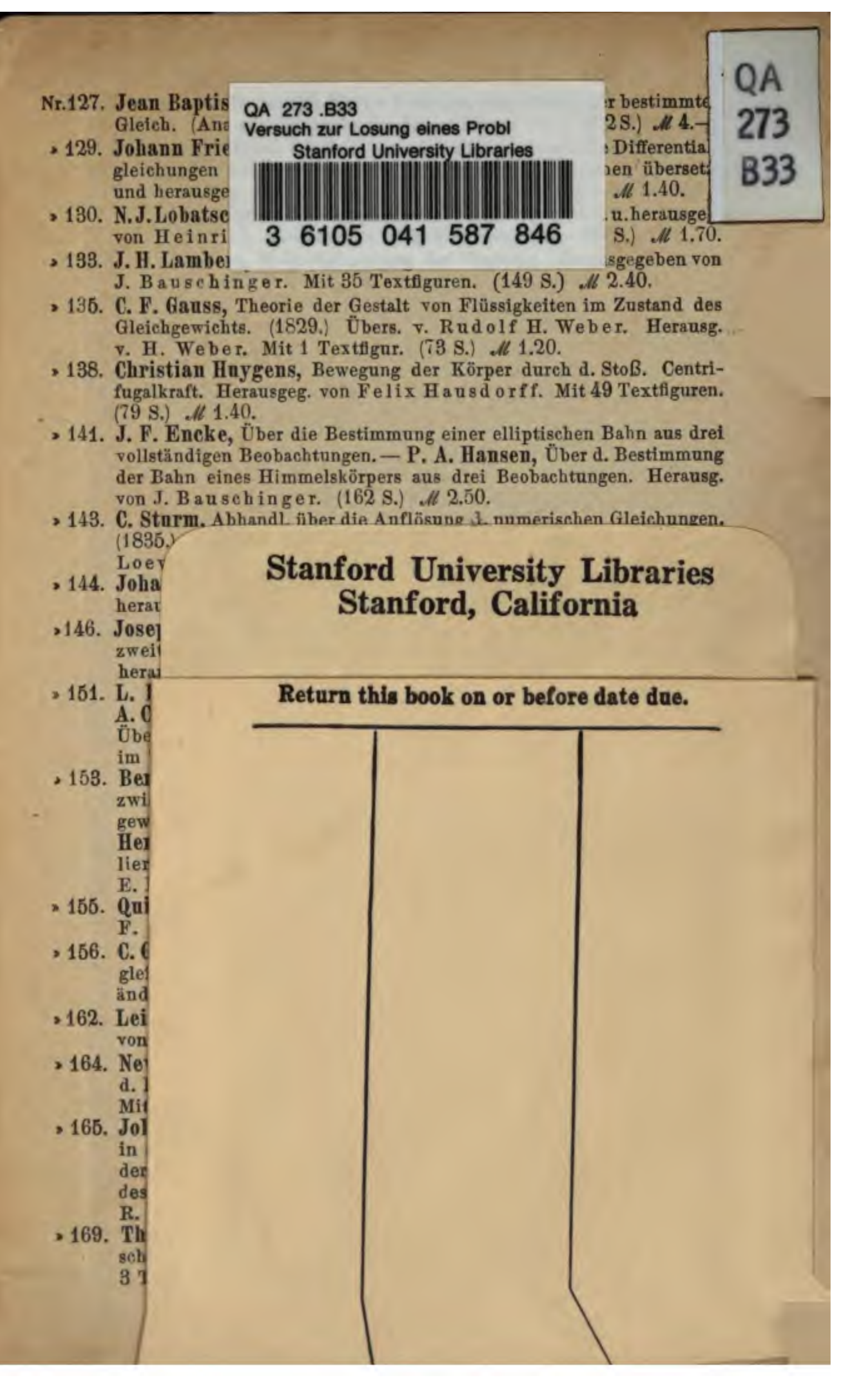
» 116. **Lejeune Dirichlet,** Die Darstellung ganz willkürlicher Functionen durch Sinus- und Cosinusreihen (1837) u. **Philipp Ludwig Seidel,** Note über eine Eigenschaft der Reihen, welche discontinuierl. Functionen darstellen (1847). Herausgegeben v. Heinrich Siebmann (58 S.) ℳ 1.—.

» 117. **Gaspard Monge,** Darstellende Geometrie. (1798.) Übersetzt und herausg. von Robert Haussner. Mit zahlreichen Figuren im Texte und in den Anmerkungen. (217 S.) ℳ 4.—.

» 122. **Carl Friedrich Gauss,** Sechs Beweise des Fundamentaltheorems über quadrat. Reste. Herausg. v. Eugen Netto. (111 S.) ℳ 1.80.

» 123. **Jacob Steiner,** Einige geometrische Betrachtungen. (1826.) Herausgegeben von Rudolf Sturm. Mit 46 Figuren im Texte u. in den Anmerkungen. (125 S.) ℳ 2.—.

» 124. **H. Helmholtz,** Abhandlungen zur Thermodynamik. Herausgegeben von Max Planck. (84 S.) ℳ 1.40.


Nr. 127. Jean Baptis... r bestimmte Gleich. (An... 2 S.) ℳ 4.—

» 129. Johann Frie... Differential-gleichungen ... ien übersetzt und herausge... ℳ 1.40.

» 130. N. J. Lobatsc... u. herausgeg. von Heinri... S.) ℳ 1.70.

» 133. J. H. Lambe... sgegeben von J. Bauschinger. Mit 35 Textfiguren. (149 S.) ℳ 2.40.

» 135. C. F. Gauss, Theorie der Gestalt von Flüssigkeiten im Zustand des Gleichgewichts. (1829.) Übers. v. Rudolf H. Weber. Herausg. v. H. Weber. Mit 1 Textfigur. (73 S.) ℳ 1.20.

» 138. Christian Huygens, Bewegung der Körper durch d. Stoß. Centrifugalkraft. Herausgeg. von Felix Hausdorff. Mit 49 Textfiguren. (79 S.) ℳ 1.40.

» 141. J. F. Encke, Über die Bestimmung einer elliptischen Bahn aus drei vollständigen Beobachtungen. — P. A. Hansen, Über d. Bestimmung der Bahn eines Himmelskörpers aus drei Beobachtungen. Herausg. von J. Bauschinger. (162 S.) ℳ 2.50.

» 143. C. Sturm, Abhandl. über die Auflösung d. numerischen Gleichungen. (1835.) ... Loev...

» 144. Joha... herau...

» 146. Jose... zwei... hera...

» 151. L. ... A. C... Übe... im ...

» 153. Ber... zwi... gew... Her... lier... E. ...

» 155. Qui... F. ...

» 156. C. ... glei... änd...

» 162. Lei... von...

» 164. Ne... d. ... Mit...

» 165. Jol... in ... der... des... R. ...

» 169. Th... sch... 3 T...

